RÉSUMÉ DE LA THÈSE *ÉTUDE HOMOTOPIQUE DES ESPACES STRATIFIÉS*

SYLVAIN DOUTEAU

Ma thèse en mathématiques [Dou19a] intitulée *Étude homotopique des espaces stratifiés* est une thèse de topologie. Plus précisément, ce travail s'inscrit dans le domaine de la topologie algébrique et de la théorie de l'homotopie. Cette thèse a pour but de décrire un cadre homotopique pour l'étude des espaces stratifiés. Elle vise à alimenter des approches nouvelles en topologie, en participant au développement de la théorie de l'homotopie stratifiée, via l'introduction de nouveaux invariants pour des objets géométriques classiques : les espaces singuliers.

Ce texte présentera quelques résultats importants de ma thèse, après avoir introduit les pré-requis appropriés et leur contexte historique. Il est structuré comme suit.

Dans une première partie, on présente des notions fondamentales en topologie. On définit les espaces topologiques, ainsi que les homéomorphismes et les équivalences d'homotopie entre eux.

Dans une seconde partie, on présente le sous-domaine plus spécifique qu'est la topologie algébrique. On définit deux invariants d'un espace topologique : l'ensemble de ses composantes connexes ainsi que son groupe fondamental, et on illustre comment ces invariants peuvent être utilisés pour comparer des espaces topologiques.

Dans une troisième partie, on introduit la notion d'espaces stratifiés via deux familles d'exemples : les variétés et les pseudo-variétés.

Dans une quatrième et dernière partie, on présente les apports de cette thèse à la théorie de l'homotopie stratifiée.

Introduction à la topologie

Qu'est-ce que la topologie ?

La topologie est l'étude du continu - par opposition au discret. Elle consiste en l'étude d'objets géométriques - de formes - à déformation près. Les propriétés topologiques d'un espace conditionnent ses propriétés géométriques. Par exemple, tout champ de vecteurs à la surface d'une sphère s'annule en au moins un point. C'est le théorème de la sphère chevelue, un cas particulier du théorème de Poincaré-Hopf. Démontré pour les surfaces par Poincaré en 1885 (non publié, voir [Mil65]) puis étendu à toute dimensions par Hopf en 1926 [Hop26]. Ce théorème s'applique indépendamment de la nature du champ de vecteur, ou de la géométrie spécifique de la sphère. Il implique à la fois que toute coiffure laissera toujours un épi, et qu'il existe toujours un point sur la terre où le vent ne souffle pas. Le tore (voir figure 1), quant à lui, a des propriétés topologiques différentes, et le théorème de Poincaré-Hopf implique qu'il existe des champs de vecteurs sur le tore ne s'annulant jamais. Par exemple, une bobine engendre un champ magnétique qui s'organise en tores concentriques, le long desquels il ne s'annule pas.

De plus, comme Poincaré l'explique dans son introduction à Analaysis Situs [Poi95] - un texte clé dans l'histoire de la topologie, marquant le début de la topologie algébrique - "La géométrie n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens". Ainsi, dans son étude de la mécanique céleste et du problème des trois corps, c'est la géométrie - et la topologie - des espaces de solutions que Poincaré va considérer. De façon générale, les applications de la topologie vont au delà des problèmes intrinsèquement géométriques via l'étude de descriptions alternatives, telles qu'un plan de phase ou un espace de solutions.

Espaces topologiques et homéomorphismes
L'objet de base en topologie est l'**espace topologique**. Un espace topologique est la donnée d'une collection de points, et d'une notion de proximité entre ces points. La figure 1 en présente quelques exemples.

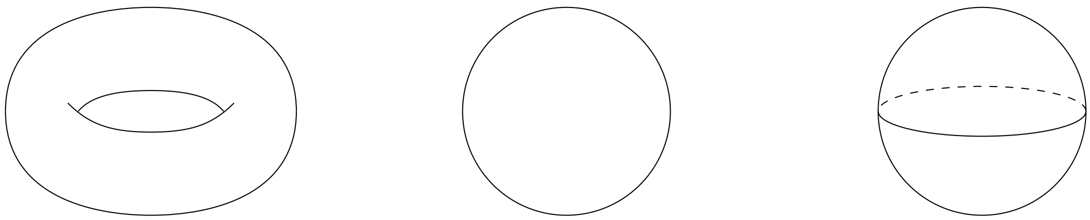

FIGURE 1. Quelques exemples d'espaces topologiques. De gauche à droite : le tore, le cercle et la sphère.

Une des questions importantes en topologie est la suivante :

Question. *Étant donnés deux espaces topologiques, comment savoir si il existe une déformation continue permettant de passer de l'un à l'autre ?*

Précisons ce qu'on entend par une "déformation continue" - le terme approprié ici est "homéomorphisme". Un homéomorphisme entre deux espaces topologiques X et Y est la donnée d'une correspondance f entre les points de X et de Y telle que tout point de Y est en correspondance avec un unique point de X via f et telle que f n'introduise aucun déchirement ni recollement.

Exemple. Pour clarifier cette définition, examinons quelques transformations entre espaces topologiques. Prenons pour X le bord d'un triangle - c'est à dire l'union des trois segments délimitant le triangle - et prenons pour Y contenant le triangle. On peut alors considérer la projection des points du bord du triangle sur le cercle. Cette transformation, f met en correspondance les points du triangle avec ceux du cercles, et réciproquement. Elle n'introduit aucun déchirement : les points proches sur le triangle ont des images proches sur le cercle, et les points proches sur le cercle sont images de points proches sur le triangle. Cette transformation est donc un homéomorphisme entre le bord du triangle et le cercle, elle est représentée en haut à gauche de la figure 2. On note qu'on peut obtenir de façon similaire un homéomorphisme entre le triangle plein et le disque.

Considérons maintenant une deuxième transformation, celle qui consiste à aplatir un cercle sur un de ses diamètres. Cette transformation est représentée en haut à droite de la figure 2. Il ne s'agit pas d'un homéomorphisme puisqu'à un point du diamètre correspondent deux point sur le cercles, de part et d'autre du diamètre. En revanche, cette transformation est bien continue, elle ne déchire pas le cercle : deux points proches sur le cercle sont envoyés sur des points proches sur le diamètre.

Considérons une autre transformation du cercle vers le segment. On s'intéresse à la transformation obtenue en découpant le cercle en un point, en le déroulant, puis en l'aplatissant sur un segment (voir le bas de la figure 2. On peut obtenir une telle transformation en associant à chaque point du cercle son angle par rapport à un point de référence, compris entre 0 et 360. Cette transformation associe bien à tout point du segment un unique pour du cercle en revanche elle n'est pas continue car elle introduit un déchirement du cercle. Ce n'est donc pas un homéomorphisme.

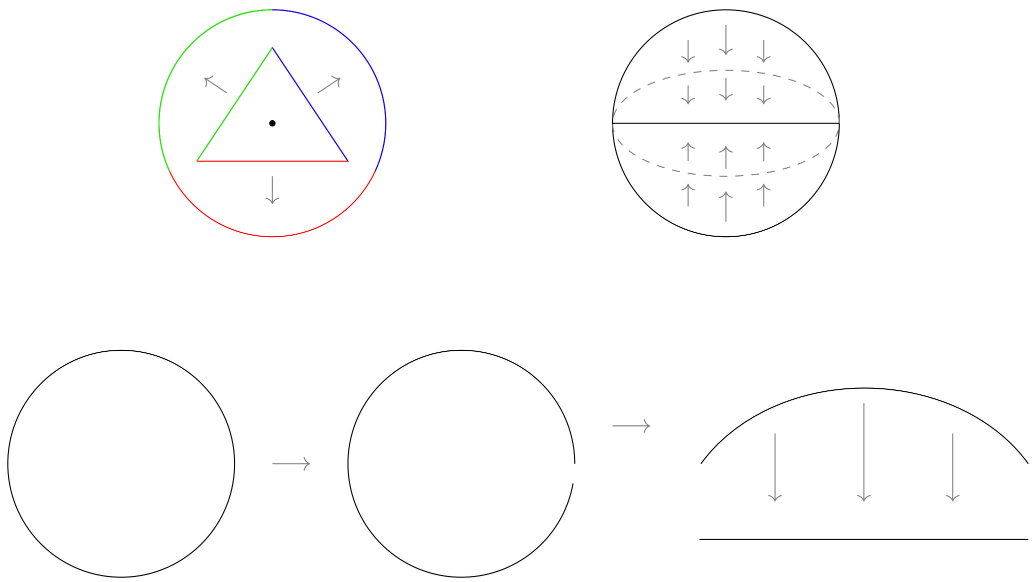

FIGURE 2. Trois transformations entre espaces topologiques. La première est un homéomorphisme, la seconde est continue mais n'est pas un homéomorphisme, et la troisième n'est pas continue.

Lorsqu'il existe un homéomorphisme entre deux espaces topologiques, on dira qu'ils sont homéomorphes. On vient de voir avec l'exemple du triangle et du cercle que deux espaces homéomorphes peuvent avoir des **géométries** différentes : L'un peut être plus petit que l'autre, l'un peut avoir des "coins" et l'autre non... Cependant, deux espaces topologiques homéomorphes ont la même "forme" en un certain sens, et il est commun pour le topologue de les identifier, c'est à dire de les considérer comme plusieurs représentations de la même forme.

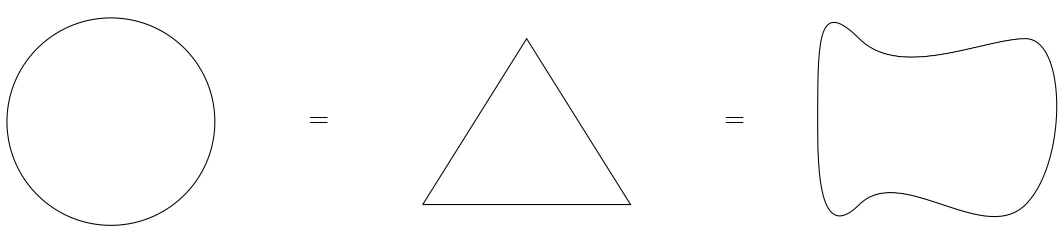

FIGURE 3. Trois représentations du même espace topologique, le cercle.

Il est en général difficile de déterminer au premier coup d'œil si deux espaces sont homéomorphes, et encore plus de trouver un homéomorphisme. On peut montrer par exemple que le donuts et la

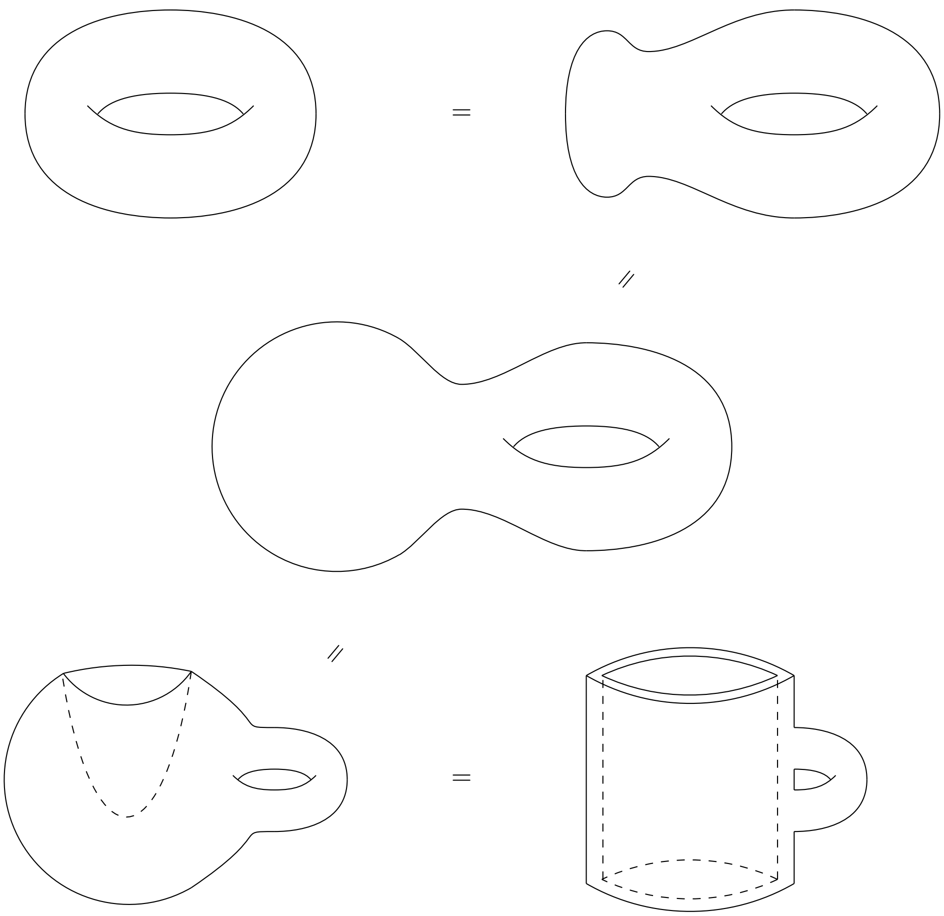

FIGURE 4. Pour le topologue, le donuts et la tasse de café ont la même forme, celle d'un tore.

tasse à café ont la même forme. Plusieurs étapes intermédiaires de la transformation de l'un en l'autre sont représentées figure 4. Cependant, on aimerait avoir un critère pour déterminer lorsqu'il ne peut pas exister de tel homéomorphisme. On voudrait par exemple montrer que le cercle et le segment - ou encore la sphère et le tore - ne sont pas homéomorphes. Dans ce but, on introduit une notion plus faible, d'équivalence d'homotopie. Deux espaces homéomorphes seront forcément homotopiquement équivalents, et on saura plus facilement détecter lorsque deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.

Homotopies et équivalences d'homotopie

On peut reformuler la notion d'homéomorphisme comme suit. Une application continue $f\colon X \to Y$ est un homéomorphisme, si il existe une autre application continue, allant dans l'autre sens, $g\colon Y \to X$ telle que les compositions sont égales à l'identité. C'est à dire qu'appliquer f puis appliquer g revient à ne pas modifier X, et appliquer g puis appliquer f revient à ne pas modifier Y. On dira que f est une équivalence d'homotopie si il existe une application continue $g\colon Y \to X$ telle que $f \circ g$

et $g \circ f$ sont **presque** égales à l'identité. Pour être plus précis, on a besoin de la notion d'homotopie entre des applications continues :

Définition. Deux applications continues f_0 et f_1 de X vers Y sont homotopes, si il existe une famille continue d'applications continues f_t de X vers Y, où t est compris entre 0 et 1.

Autrement dit, deux applications sont homotopes si l'on peut passer continument de l'une à l'autre. On peut maintenant définir les équivalences d'homotopies : $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie si il existe $g \colon Y \to X$ tel que les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont **homotopes** à l'identité de X et de Y respectivement. Autrement dit si l'on peut passer continument de $f \circ g$ à l'identité de X et de $g \circ f$ à l'identité de Y.

Exemple. Soit X un segment et Y un point. Considérons l'application $f \colon X \to Y$ aplatissant X sur Y, et $g \colon Y \to X$ l'application envoyant Y sur une des extrémités du segment. La composition $f \circ g$ associe à l'unique point de Y, lui même, c'est donc l'identité. La composition $g \circ f$ associe une des extrémités de X à tout point de X. Montrons qu'elle est homotope à l'identité. Supposons que le segment X est égal au segment $[0, 1]$, et que g envoie le point de Y sur 0. On pose $f_t \colon X \to X$ qui à un point x associe $t \times x$. Alors, f_1 est l'identité, et f_0 est la composée $g \circ f$, ces deux applications sont donc homotopes, on en déduit que le point et le segment sont homotopiquement équivalents, voir la figure 5. De la même façon, on montre qu'un cylindre et un ruban de Möbius sont tous les deux homotopiquement équivalents à un cercle. Ils sont donc homotopiquement équivalents l'un à l'autre, voir la figure 6. Cependant, ils ne sont pas homéomorphes.

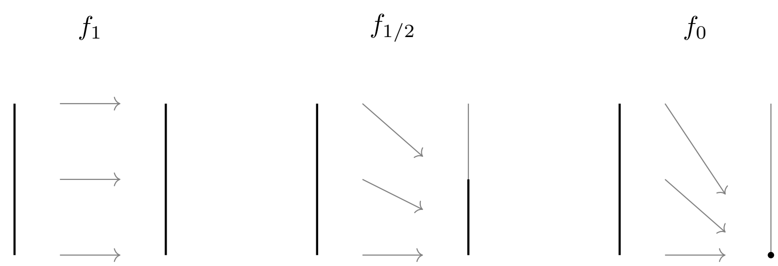

FIGURE 5. On peut passer continuement de l'identité du segment à la projection sur un point. Le segment et le point sont donc homotopiquement équivalents.

La topologie algébrique

Un des enjeux de la topologie algébrique est de trouver des critères explicites permettant de déterminer si deux espaces sont homotopiquement équivalents ou non. Pour ce faire, on associe à chaque espaces des **invariants**. Un invariant est une quantité préservée par équivalence d'homotopie. Ainsi, si X et Y sont deux espaces homotopiquement équivalents, leurs invariants sont égaux, et on cherche à déterminer des conditions pour que la réciproque soit vrai.

Des premiers invariants à la théorie de l'homotopie L'histoire de la topologie algébrique commence en 1895 avec le texte de H. Poincaré, Analysis situs [Poi95]. Dans ce texte, il définit les premiers invariants algébriques associés à un espace : son groupe fondamental - qu'on présentera dans ce texte - et son homologie. En 1932 E.Čech étend la construction du groupe fondamental en une famille infinie d'invariants : les groupes d'homotopie d'un espace [Č32]. Le premier de ces

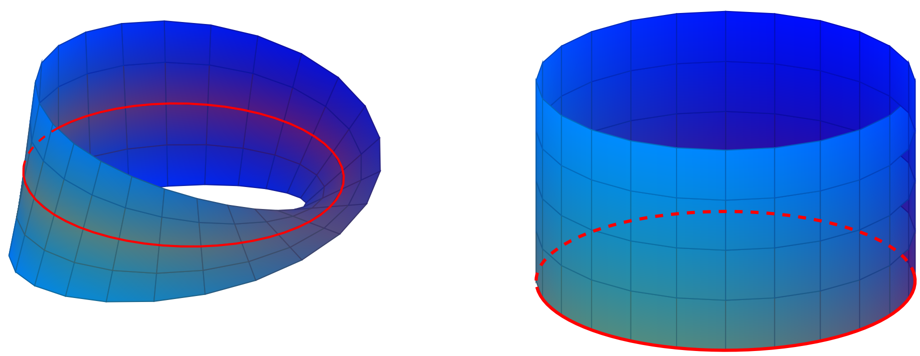

FIGURE 6. Un ruban de Möbius, à gauche, et un cylindre, à droite. Les deux espaces peuvent se rétracter sur le cercle représenté en rouge. Ils sont donc homotopiquement équivalents.

groupes étant le groupe fondamental. En 1935 W.Hurewicz exhibe une relation entre ces groupes d'homotopie et l'homologie définie par H. Poincaré, ce qui vient confirmer la pertinence de ceux-ci. On lui doit aussi la première définition du type d'homotopie d'un espace - on devra alors attendre l'arrivée des catégories modèles pour avoir une définition rigoureuse de ce concept. En 1949 J. Whitehead [Whi49] montre que les groupes d'homotopie d'un espace déterminent conjointement son type d'homotopie (voir la fin de cette section).

Au fil du temps, des invariants plus fins - encodant des propriétés spécifiques d'un espace - sont définis. Par exemple, on associe à tous fibré principal des classes caractéristiques, ce qui permet leur classification (voir [MS74]). D'autre part, en 1945 S. Eilenberg et N. Steenrod caractérisent de façon axiomatique l'homologie définie par H.Poincaré, ouvrant la voie aux théories (co)homologiques généralisées [ES45]. Parmi celles-ci, on a par exemple la K-théorie topologique [Ati67] - associant à un espace la collection des fibrés vectoriels sur celui-ci - ou encore les diverses théories de cobordisme.

On peut retenir deux succès importants issus de la période "classique" de la topologie algébrique (1945-1967) :

— Le théorème de l'indice d'Atiyah, prouvé en 1963 par M. Atiyah (Médaille Fields 1966, prix Abel 2004) et I. Singer (Prix Abel 2004) [AS63]. Ce résultat montre l'égalité entre deux quantités, l'une de nature analytique, l'autre topologique. Il fait parti d'une grande famille de résultat reliant des quantités de natures mathématiques différentes, dont l'un des premiers exemples est le théorème de Poincaré-Hopf que l'on a vu plus tôt.

— La preuve des conjectures de Weil, par B. Dwork [Dwo60], A. Grothendieck (médaille Fields 1966) [Gro68] puis Deligne (médaille Fields 1978, prix Abel 2013). Celles-ci relient les propriétés arithmétiques et topologiques des variétés algébriques, et constituent un pilier de la géométrie arithmétique.

En 1967 D. Quillen introduit la notion de catégorie modèle [Qui67]. Celle-ci permet d'aborder abstraitement la notion d'homotopie, et marque le début de la **théorie de l'homotopie** moderne. Cette dernière évolue ensuite dans deux directions complémentaires :

— La théorie des catégories modèles permet une approche systématique à l'étude des invariants. En 1962, E. Brown [Bro62] a montré que toute théorie cohomologique généralisée était représentée par un spectre - une famille d'espaces topologiques vérifiant certaines propriétés. L'étude des spectres a conduit à la théorie de l'homotopie stable, qui s'exprime dans le langage des catégories modèles. Cette approche a permis des progrès spectaculaires en topologie algébrique. En effet, elle est cruciale dans la résolution du problème de l'invariant de Kervaire par M. Hill, M. Hopkins and D. Ravenel [HHR11] (voir aussi [Bal09]), qui était resté ouvert pendant plus de cinquante ans. Au delà de la topologie algébrique, on peut mentionner les applications de la théorie de l'homotopie stable au développement de l'homotopie motivique par F. Morel et V. Voevodsky (Médaille Fields 2002) - une des théories phares en géométries algébriques depuis vingt ans - ainsi que sa contribution aux avancées récentes en théorie de Hodge p-adique par B. Bhatt, M. Morrow et P. Scholze (médaille Fields 2018), voir [Sch18].

— Via les travaux de A. Joyal [Joy02, Joy] sur les ensembles simpliciaux, la théorie de l'homotopie a aussi donné lieu à l'apparition des quasi-catégories. En plus de leurs applications en topologie algébrique (voir [Lur09]), ces dernières sont devenues des objets centraux en théorie des catégories et en logique [Pro13], où elles ont des applications jusqu'en informatique fondamentale.

Les composantes connexes

Le premier invariant que l'on peut attribuer à un espace est son nombre de morceaux. On parle de **composantes connexes**. Si deux points dans un espace peuvent être reliés par un **chemin** - c'est à dire, si on peut se déplacer continument de l'un à l'autre sans quitter l'espace - ils sont dans la même composante connexe ; pour qu'un espace ait plusieurs composantes connexes, il faut qu'il ait plusieurs morceaux ne pouvant pas être reliés entre eux. Lorsqu'un espace n'a qu'une seule composante connexe, on dira qu'il est connexe. Par exemple, un cercle est connexe, puisqu'on peut relier n'importe quel point à n'importe quel autre - on a même plusieurs chemins possibles. À l'inverse, un segment privé de son milieu a deux composantes connexes, de part et d'autre du milieu. On ne peut pas passer de l'une des parties à l'autre sans passer par le milieu.

Figure 7. Le segment privé de son milieu a deux composantes connexes (en rouge et bleu) tandis que le cercle est connexe.

On note $\pi_0(X)$ le nombre de composantes connexes de X. Si X et Y sont homotopiquement équivalents ils doivent avoir le même nombre de morceaux, et donc $\pi_0(X) = \pi_0(Y)$. π_0 est donc un **invariant**. C'est en fait le premier invariant (on dit souvent que c'est le 0-ième) d'une famille d'invariants, notés π_n, les **groupes d'homotopie** d'un espace.

Les lacets et le premier groupe d'homotopie

On s'intéresse maintenant à des chemins particulier dans un espace : les **lacets**. Les lacets sont des chemins reliant un point à lui même, c'est à dire des boucles. On étudie les lacets à homotopie près (voir la définition d'homotopie page 5) c'est-à-dire qu'on identifie deux lacets si on peut passer continument de l'un à l'autre. On note qu'étant donné un point x dans X, il existe toujours un lacet constant, restant immobile en x (l'image de ce lacet est simplement le point x). Lorsque c'est le seul lacet (c'est à dire que tous les autres lacets lui sont homotopes), on dira que l'espace est **simplement connexe**. On note de plus que si on dispose de deux lacets basés en x, on peut les concaténer. C'est à dire emprunter le premier chemin, puis une fois revenu au point de départ, emprunter le second chemin. On notera $\alpha\star\beta$ la concaténation des chemins α et β. On remarque que la concaténation avec le lacet constant ne change pas le lacet de départ, et on remarque finalement que si α est un lacet, on peut définir α^{-1} le lacet correspondant au même chemin, pris en sens inverse. Mais alors, la concaténation $\alpha \star \alpha^{-1}$ est homotope au lacet constant. On peut résumer ces propriétés comme suit :

— Étant donnés deux lacets α, β, leur concaténation donne un nouveau lacet, $\alpha \star \beta$.

— La concaténation d'un lacet α avec le lacet constant, qu'on notera e, ne modifie pas α. On a $\alpha \star e = e \star \alpha = \alpha$.

— Tout lacet α admet un lacet inverse α^{-1} vérifiant $\alpha \star \alpha^{-1} = e$

Ces propriétés définissent un **groupe** - un objet algébrique. C'est la structure algébrique de ses invariants qui donne son nom à la topologie *algébrique*. Le groupe des lacets à homotopie près d'un espace est appelé son **groupe fondamental**. On le notera $\pi_1(X, x)$. C'est le premier groupe d'homotopie de X. Il s'agit d'un **invariant**.

Exemple. Calculons les groupes fondamentaux des trois espaces topologiques de la figure 1 : la sphère, le cercle et le tore. Pour la sphère, tout lacet peut être rétracté sur le lacet constant (voir figure 8), son groupe fondamental ne contient donc que le lacet constant e.

Pour le cercle, en plus du lacet constant, on a un lacet qui fait exactement le tour du cercle. Notons le α. En le concaténant avec lui même, on obtient des lacets faisant plusieurs tours, et son inverse, α^{-1}, correspond à un tour de cercle dans la direction opposé. Comme tous les lacets du cercle peuvent être obtenus comme un certain multiple de α où de son inverse, on dit que le groupe fondamental du cercle est engendré par α. α est un **générateur** de π_1.

Pour le tore, T, on peut identifier deux lacets indépendants, α et β représenté sur la figure 9. Ils ne sont pas homotopes, donc correspondent bien à des éléments distincts de $\pi_1(T)$. De plus, on peut obtenir tout élément de $\pi_1(T)$ comme combinaison de α et de β. Ceux-ci engendrent donc conjointement $\pi_1(T)$.

Comme la sphère, le cercle et le tore ont des groupes fondamentaux deux à deux distincts, et que ceux-ci sont des invariants, on peut en déduire que ces espaces ne sont pas homotopiquement équivalents. En particulier, ils ne sont pas homéomorphes.

Quelques théorèmes

Les invariants π_0 et π_1 sont les deux premiers d'une famille infinie d'invariants : les groupes d'homotopie π_n, où n est un entier positif. Conjointement ils déterminent le **type d'homotopie** d'un espace topologique. Plus précisément, on a les résultats suivants, dûs à J. Whitehead [Whi49].

Théorème 1. *Si X est un point, $\pi_n(X) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Réciproquement, si $\pi_n(X) = 0$ pour tout $n \geq 0$, X est homotope à un point. On dit dans ce cas que X est contractile.*

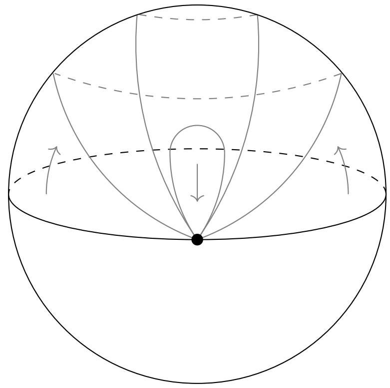

FIGURE 8. Tout lacet sur la sphère peut être déformé continuement en le lacet constant. Le groupe fondamental de la sphère est donc trivial.

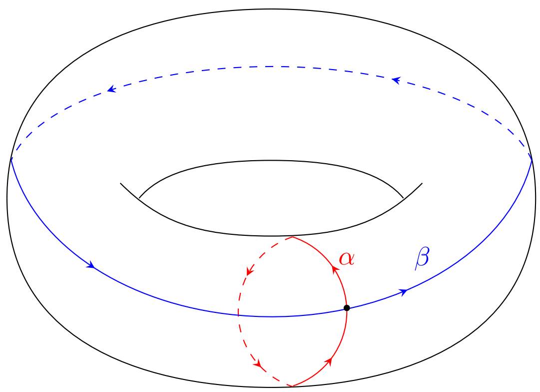

FIGURE 9. Les deux lacets α et β engendrant le groupe fondamental du tore.

D'autre part, toute application continue $f\colon X \to Y$ induit une correspondance entre $\pi_n(X)$ et $\pi_n(Y)$, qu'on notera $\pi_n(f)$. On dit que cette correspondance est **bijective** si à tout élément de $\pi_n(Y)$ correspond un unique élément de $\pi_n(X)$. On peut alors énoncer un résultat plus général :

Théorème 2. *Soit $f\colon X \to Y$ une application continue. f est une équivalence d'homotopie si et seulement si , pour tout $n \geq 0$, la correspondance $\pi_n(f)\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ est bijective.*

Ainsi, grâce aux groupes d'homotopie, on peut déterminer lorsque deux espaces topologiques sont homotopiquement équivalents.

LES ESPACES STRATIFIÉS

Variétés et espaces singuliers

Tous les exemples d'espaces topologiques qu'on a vu jusqu'ici étaient des **variétés**. Ce sont des espaces qui ont une propriété très particulière : si on zoome sur n'importe quel point, on peut identifier le voisinage de ce point à un segment, ou un disque (ou un équivalent en dimension plus grande). Voir la figure 10. On note qu'une première définition des variétés a été formulée par B.

Riemann en 1851 [Rie51], mais que la première définition rigoureuse n'a été donnée qu'en 1912 par H. Weyl [Wey55]. En effet, cette définition repose sur les notions de voisinages et d'homéomorphismes, qui n'existaient pas du temps de B. Riemann.

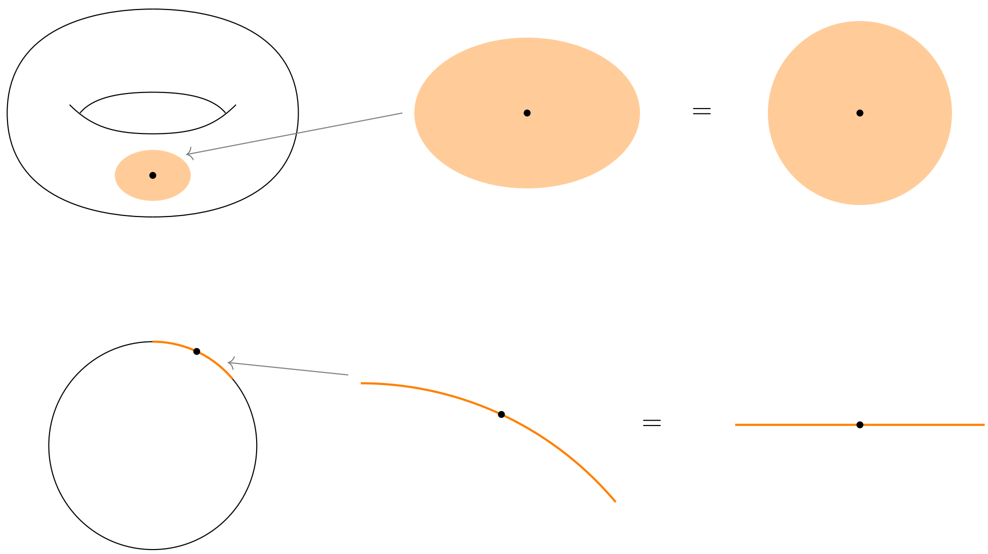

FIGURE 10. Lorsque l'on zoome sur un point du tore, son voisinage est homéomorphe à un disque. Pour le cercle, on obtient un segment.

Bien évidemment il existe énormément d'espaces topologiques qui ne sont pas des variétés. Parmi eux, certains sont presque des variétés : les **pseudo-variétés**. Ces derniers vérifient la propriété suivante : pour presque tous les points, ils vérifient la propriété d'une variété. Ces points sont dits **réguliers**, et ont des voisinages homéomorphes à un segment, ou un disque, ou un analogue de plus grande dimension. Les points restant sont dit **singuliers**, et leurs voisinages sont homéomorphes à des **cônes**. Ici le mot cône est à comprendre au sens général : le cône de X est l'union des segments reliant X au sommet du cône. Voir la figure 11.

Stratifications

Pour étudier les pseudo-variétés, on introduit la notion de **stratification**. Une stratification d'un espace topologique est une décomposition de cet espace en plusieurs morceaux, appelés **strates**. Pour une pseudo-variété, on choisit les strates comme suit : d'abord, on rassemble les points réguliers en une strate dite régulière. Puis, on regroupe les points singuliers suivant leur type de singularité (c'est à dire suivant la forme des voisinages).

Exemple. On vient de voir qu'un tore pincé et une courbe s'auto-intersectant sont des pseudo-variétés. Les stratifications de ces espaces auront deux strates : une strate singulière - contenant seulement le point singulier - et une strate régulière contenant le reste des points.

On peut aussi considérer deux sphères recollées le long d'un segment (voir figure 12). On aura alors trois strates : La strate régulière, représentée en bleu, et deux strates singulières représentées en rouge et vert. L'une contient les deux extrémités du segment selon lequel on a recollé les sphères, l'autre contient tous les points à l'intérieur du segment. En effet, les points aux extrémités et à l'intérieur du segment ont des voisinages différents.

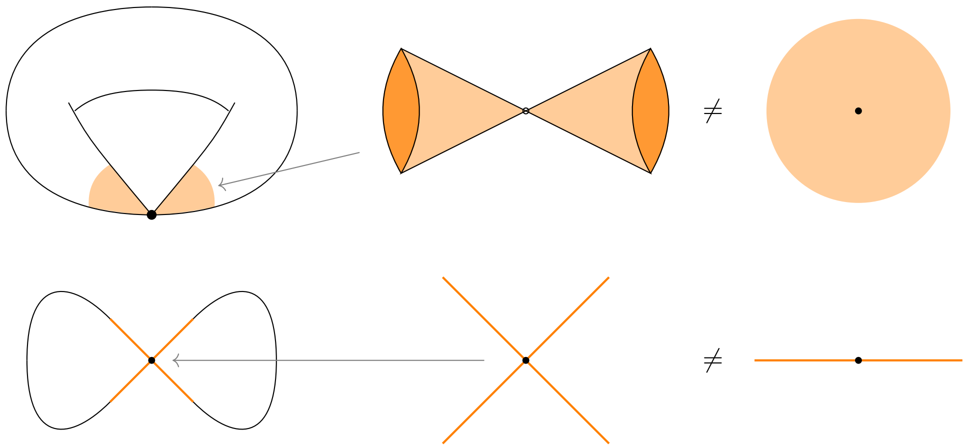

FIGURE 11. Le tore pincé est une pseudo-variété. Le voisinage de son point singulier est homéomorphe au cône de deux cercles. De même, une courbe qui s'auto-intersecte est une pseudo-variété. Le voisinage du point singulier est homéomorphe au cône de quatre points.

Pour les pseudo-variétés, le découpage en strate provient de la structure de l'espace. Mais plus généralement, on peut considérer un découpage **arbitraire** de n'importe quel espace. C'est la définition plus général d'**espace stratifié**. Un espace stratifié est un espace topologique X pour lequel on a **choisi** un découpage en strates. Ce choix peut provenir d'informations topologiques - comme dans le cas des pseudo-variétés - ou être motivé par une situation particulière. Dans le reste de ce texte, pour représenter la stratification, chaque strate d'un espace stratifié sera représentée par une couleur différente, de plus, dans un soucis de simplicité, les espaces stratifiés que l'on considérera par la suite n'auront que deux strates, mais la théorie fonctionne pour n'importe quel nombre de strates.

La théorie des singularités Sous l'impulsion de R. Thom (médaille Fields 1958), H. Hironaka (médaille Fields 1974) et H. Whitney, la théorie des singularités émerge de la découverte des pseudo-variétés et de la notion de stratification qui leur est associée. Celle-ci vise à étudier les situations limites en géométrie où les singularités apparaissent, pour en déduire des informations sur les objets géométriques réguliers (sans singularités). En effet, il existe des relations subtiles entre les propriétés d'un espace régulier et le type de singularité qui peut apparaitre lorsqu'on modifie légèrement celui-ci.

Applications et homotopies stratifiés
Étant donnés deux espaces stratifiés X et Y une **application stratifiée** $f\colon X \to Y$ est une application continue qui préserve les strates. C'est-à-dire que si S est une strate de X, il existe une strate de Y, notée T, telle que tous les points de S sont envoyés sur des points de T. Un **homéomorphisme stratifié** est un homéomorphisme qui préserve les strates, et une homotopie stratifiée entre deux applications stratifiées f_0 et f_1 de X vers Y est la donnée d'une famille continue d'applications stratifiées f_t entre X et Y. Ainsi, on peut définir comme précédemment une notion **d'équivalence d'homotopie stratifiée**. Voir figure 13.

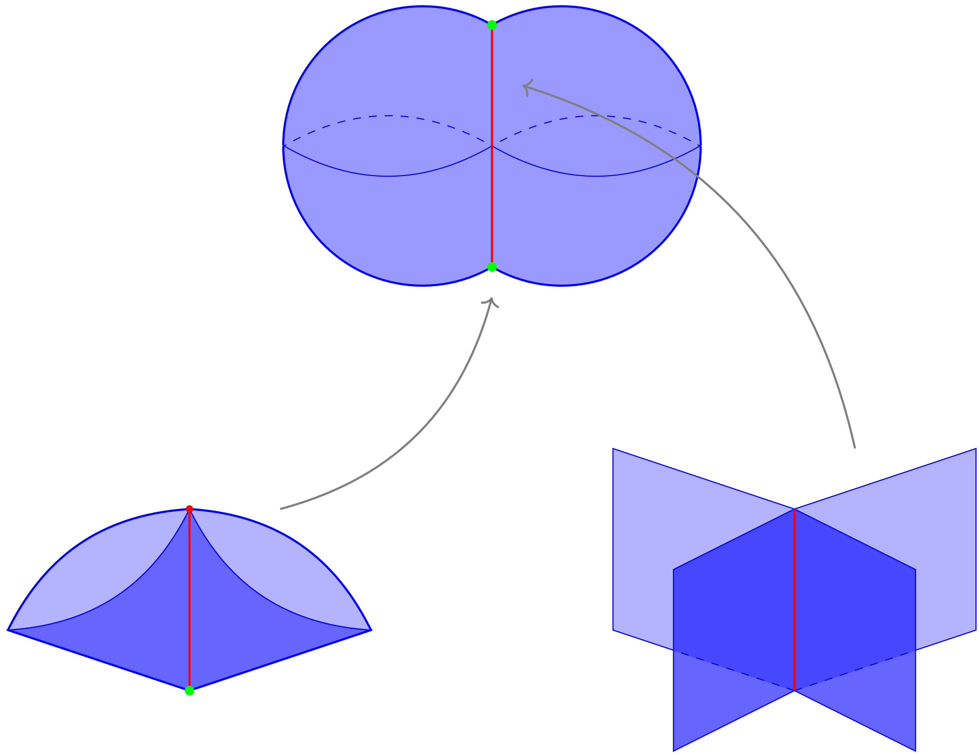

Figure 12. Deux sphères recollées le long d'un segment. Les points verts et rouges ont des voisinages distincts.

Quelques avancées sur la topologie des espaces stratifiés

La théorie des espaces stratifiés débute avec l'étude des **variétés algébriques**. Ces dernières sont des courbes ou des surfaces (ou des analogues en dimension plus grande) définies par des familles de polynômes. Par exemple, le cercle unité dans le plan correspond à l'ensemble des points (x, y) vérifiant $x^2 + y^2 = 1$. Contrairement à ce que leur nom suggère, les variétés algébriques ne sont pas toujours des variétés au sens que l'on a défini ici. En effet, elles peuvent avoir des points singuliers. Par exemple, le tore pincé est une variété algébrique et admet un point singulier. En 1965, H. Whitney [Whi65] a montré que toute variété algébrique admet une stratification en pseudo-variété. Ce résultat a mené à la définition de nouveaux invariants pour les variétés algébriques - généralisant ceux qui n'étaient définis que pour les variétés régulières - culminant avec l'introduction de la cohomologie d'intersection par M. Goresky et R.MacPherson en 1980 [GM80, GM83].

Depuis, la cohomologie d'intersection a donné lieu à la théorie des faisceaux pervers - un outil puissant en géométrie algébrique [BBD82]- et est toujours très étudiée [FM13][CSAT18]. D'autre part, la théorie des espaces stratifiés a aussi évoluée dans une direction plus homotopique. F. Quinn [Qui88] a introduit la notion d'espace homotopiquement stratifiés, généralisant les pseudo-variétés. Plus tard, D. Miller [Mil13] a montré que ces espaces vérifiaient une version stratifiée du théorème de Whitehead. Par ailleurs, D. Treumann [Tre09], J. Woolf [Woo09] puis J. Lurie [Lur] ont développé

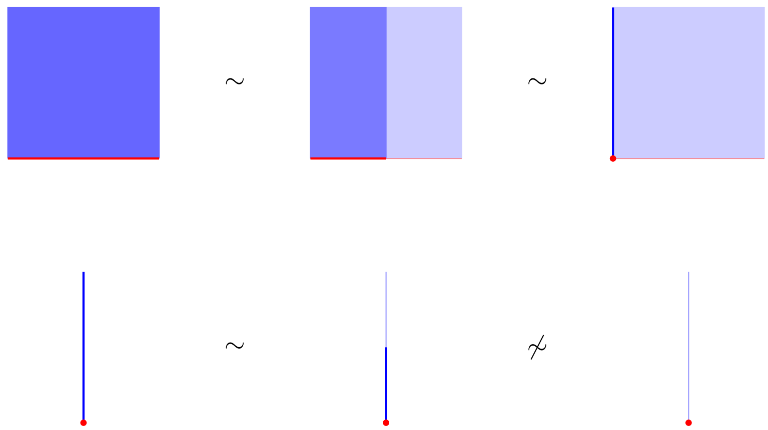

FIGURE 13. En haut, une équivalence d'homotopie stratifiée entre le carré dont un côté est singulier, et le segment dont une extrémité est singulière. En bas, l'équivalence d'homotopie entre le segment et le point n'est pas stratifiée : la décomposition en strates n'est pas préservée.

une théorie des chemins sortants, qui vient généraliser au cas stratifié la notion de catégorie des chemins d'un espace.

Ma thèse s'inscrit dans la continuité de ces résultats. Il s'agit de définir et de caractériser le **type d'homotopie stratifié** des espaces stratifiés. Pour ce faire, on définit de nouveaux invariants, les **groupes d'homotopie stratifiés**.

Les lacets stratifiés et le premier groupe d'homotopie stratifié
Soit X un espace stratifié à deux strates : X_0, en rouge, et X_1 en bleu. Pour définir le premier groupe d'homotopie stratifié de X, on va considérer trois types de lacets :

— Les lacets rouges, entièrement contenus dans la partie rouge de X. Ceux-ci vont correspondre aux éléments du groupes fondamental de X_0, $\pi_1(X_0)$.

— Les lacets bleus, entièrement contenus dans la partie bleue de X. Ceux-ci correspondront aux élément de $\pi_1(X_1)$.

— Un nouveau type de lacets stratifiés, qu'on appellera dans ce texte des **lacets en ruban**.

Considérons un ruban, qu'on notera R, possédant deux strates. Un de ses bords est colorié en rouge et correspond à la strate R_0, le reste du ruban correspond à la strate R_1, en bleu. (voir la figure 14). Un chemin en ruban dans X est une application stratifiée de R dans X. Étant donné un tel chemin en ruban, si on ne regarde que l'image du bord rouge du ruban, on obtient un chemin dans la partie rouge de X. De même, si on ne regarde que le bord bleu du ruban, on obtient un chemin dans la partie bleue de X. On définit maintenant un lacet en ruban comme un chemin en ruban qui revient à son point de départ. De façon équivalente, un lacet en ruban dans X est une application stratifiée du bandeau stratifié dans X (voir figure 14). Tout comme pour les lacets usuels, on peut concaténer des lacets en rubans. Ainsi, l'ensemble des lacets en rubans à homotopie stratifiée près forme un groupe. De plus, à chaque lacet en ruban correspond un lacet rouge et un lacet bleu : on les obtient en ne regardant que les bords du ruban. Le premier **groupe d'homotopie stratifié** de X est le donnée de ces trois groupes (le groupe fondamental de X_0, celui de X_1 ainsi que le groupe des lacets en rubans), et de la correspondance entre lacets en rubans et lacets rouges et bleus. On le note $s\pi_1(X)$.

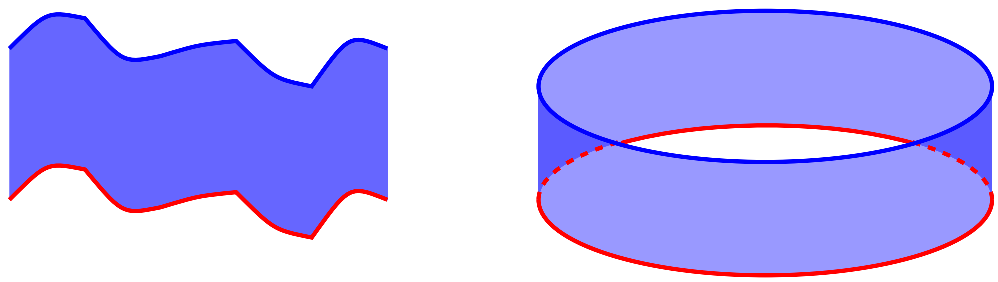

Figure 14. À gauche un ruban stratifié, et à droite un bandeau stratifié. Les bords supérieurs donnent des chemins bleus, et les bords inférieurs donnent des chemins rouges. Dans le cas du bandeau, ces chemins sont des lacets.

Exemple. Considérons la sphère sur laquelle on a marqué le pôle sud en rouge. La partie rouge est réduite à un point, et son groupe fondamental ne contient donc que le lacet constant. On dit que le groupe fondamental est trivial. De plus, on a vu que tous les lacets sur la sphère pouvaient se contracter sur le lacet constant, et on peut faire cette contraction sans passer par le pôle sud (voir figure 8), ainsi le groupe fondamental de la partie bleu est lui aussi trivial. Cependant, il existe des lacets en ruban ne pouvant pas être contractés sur le lacet constant, voir la figure 15. Le premier groupe d'homotopie stratifié de la sphère dont le pôle sud est marqué n'est donc pas trivial (il contient d'autres lacets que les lacets constant).

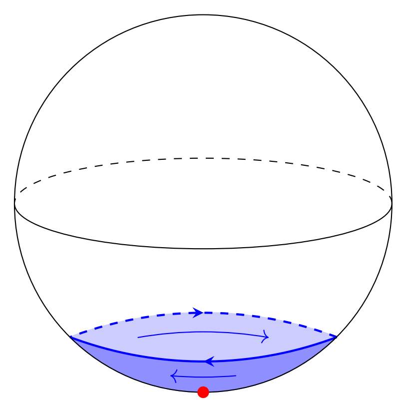

Figure 15. Un lacet en ruban non-trivial sur la sphère avec le pôle sud singulier.

Le premier groupe d'homotopie stratifié d'un espace stratifié est un **invariant**. En particulier, si deux espaces stratifiés ont des groupes d'homotopie stratifiés différents, ils ne sont pas homotopiquement équivalents au sens stratifié.

Exemple. Considérons de nouveau le cylindre et le ruban de Möbius (qu'on appellera espace de Möbius pour éviter la confusion). Ajoutons une stratification où le cercle représenté en rouge est la strate singulière (voir figure 16).

Calculons d'abord le premier groupe d'homotopie stratifié du cylindre. La partie rouge du cylindre est un cercle. Son groupe fondamental est donc engendré par un seul élément (voir l'exemple page 8). La partie bleu du cylindre est encore un cylindre, et on a vu qu'un cylindre était homotopiquement équivalent à un cercle. La partie bleu du cylindre a donc le même groupe fondamental que la partie rouge. Finalement, les lacets en ruban sur le cylindre stratifié correspondent exactement à la donnée de deux lacets identiques parallèles : un sur la partie bleue, et un sur la partie rouge. On obtient donc trois fois le même groupe pour les lacets rouge, bleus et en rubans. De plus, à un lacet en ruban correspondent les mêmes lacets rouge et bleu.

Pour l'espace de Möbius, la partie rouge est elle aussi un cercle. De plus, la partie bleu est un cylindre (Si on découpe un espace de Möbius le long de son milieu, on obtient un cylindre), on en déduit que la partie rouge et la partie bleu ont le même groupe fondamental. Examinons les lacets en ruban. Chaque lacet en ruban fait deux fois plus de tours dans la partie rouge que dans la partie bleue. En effet, lorsqu'un ruban s'est enroulé une fois autour de la partie rouge de l'espace de Möbius, la partie bleu du ruban se retrouve à l'opposé de son point de départ. Il faut donc faire un deuxième tour sur la partie rouge pour que la partie bleue soit de retour à son point de départ. On en déduit qu'à un lacet en ruban sur l'espace de Möbius correspond à des lacets rouge et bleu différent. Le premier faisant deux fois plus de tour que le second.

Finalement, le premier groupe d'homotopie stratifié du cylindre stratifié et de l'espace de Möbius stratifié sont différents (les correspondances entre lacets en rubans et lacets rouges et bleus ne sont pas les mêmes), ces deux espaces ne sont donc pas homotopiquement équivalents **au sens stratifié**. Néanmoins, on a vu précédemment qu'ils étaient homotopiquement équivalent au sens usuel. On en déduit que les deux notions sont différentes.

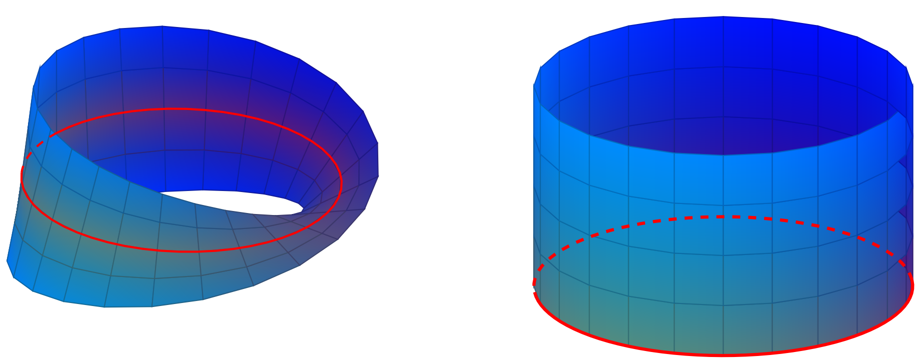

FIGURE 16. Un ruban de Möbius stratifié, et un cylindre stratifié. La strate singulière est représentée en rouge.

Résultats nouveaux

Le résultat le plus important de ma thèse est la définition du **type d'homotopie faible stratifié**. Cette notion n'a de sens que dans une **catégorie modèle** - un outil théorique pour étudier l'homotopie. Aucune catégorie modèle pour les espaces stratifiés n'était connue jusque là. Dans ma thèse, j'ai défini une catégorie modèle, noté Strat, et prouvé le résultat suivant :

Théorème (9.2.7)**.** *La catégorie Strat est une catégorie modèle pour les espaces stratifiés.*

Dans ce contexte, j'ai défini les **groupes d'homotopie stratifiés** - les $s\pi_n$, des analogues stratifiés aux groupes d'homotopie usuels - et j'ai montré qu'ils étaient des **invariants** du type d'homotopie faible stratifié. Le premier groupe d'homotopie stratifié étant celui présenté plus haut. J'ai ensuite montré que ceux-ci caractérisaient entièrement le type d'homotopie faible stratifié. En particulier, on obtient un analogue stratifié au théorème de Whitehead :

Théorème (5.3.7)**.** *Soit $f\colon X \to Y$ une application stratifiée entre deux espaces stratifiés vérifiant certaines hypothèses. f est une équivalence d'homotopie stratifiée si, et seulement si, pour tout $n \geq 0$, la correspondance $s\pi_n(X) \to s\pi_n(Y)$ est bijective.*

Ce premier résultat constitue la première étape d'un projet en cours - plus général - d'étude de la théorie de l'homotopie stratifiée [Dou18][Dou19b]. Les éléments de théorie de l'homotopie classique que l'on a présenté dans ce texte ne représente qu'une fraction de la théorie générale. Comparativement la théorie de l'homotopie stratifiée est encore peu développée. La définition d'un contexte précis dans lequel développer cette théorie - contexte que ce résultat fournit - ouvre la voie à de nouveaux axes de développement. Ces résultats ont déjà été appliqués par d'autres auteurs (voir notamment [Hai18]). Le contexte qu'on a maintenant permet d'aborder des questions telles que la théorie de l'homotopie stable des espaces stratifiés, ou encore la définition et l'étude de théories cohomologiques d'intersection généralisées. Deux directions dans lesquelles j'ai commencé à travailler.

Le deuxième résultat, quant à lui, a des applications plus immédiates. On peut notamment en déduire des preuves alternatives de résultats classiques en théorie des nœuds [Dou19c]. De façon plus générale, ce résultat soulève de potentielles applications pour l'étude des plongements. Puisqu'un espace stratifié est associé à tout plongement, la définition de nouveaux invariants pour les espaces stratifiés donne accès à de nouveaux invariants pour les plongements. L'exemple des nœuds montre que ceux-ci sont pertinents, et ont le potentiel d'apporter des méthodes nouvelles.

En définitive cette thèse constitue un travail de fondation. C'est une contribution au développement de la théorie de l'homotopie stratifiée, qui fournit un socle sur lequel construire de nouvelles approches en topologie.

Références

[AS63] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 :422–433, 1963.

[Ati67] M. F. Atiyah. *K-theory*. Lecture notes by D. W. Anderson. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

[Bal09] P Ball. Hidden riddle of shapes solved. *Nature*, 2009.

[BBD82] Alexander A. Beilinson, Joseph Bernstein, and Pierre Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.

[Bro62] Edgar H. Brown, Jr. Cohomology theories. *Ann. of Math. (2)*, 75 :467–484, 1962.

[CSAT18] David Chataur, Martintxo Saralegi-Aranguren, and Daniel Tanré. Intersection cohomology, simplicial blow-up and rational homotopy. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 254(1214) :viii+108, 2018.

[Dou18] Sylvain Douteau. A Simplicial Approach to Stratified Homotopy Theory. *arXiv e-prints*, page arXiv :1801.04797, January 2018. accepté pour publication à Transactions of the American Mathematical Society.

[Dou19a] Sylvain Douteau. *Étude homotopique des éspaces stratifiés*. PhD thesis, Universite de Picardie Jules Verne, juillet 2019. disponible en ligne https ://arxiv.org/abs/1908.01366.

[Dou19b] Sylvain Douteau. Homotopy theory of stratified spaces. *arXiv e-prints*, page arXiv :1911.04921, November 2019. accepté pour publication à Algebraic and Geometric Topology.

[Dou19c] Sylvain Douteau. Théorème de Whitehead stratifié et invariants de nœuds. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 357(9) :737–742, 2019.

[Dwo60] Bernard Dwork. On the rationality of the zeta function of an algebraic variety. *Amer. J. Math.*, 82 :631–648, 1960.

[ES45] Samuel Eilenberg and Norman E. Steenrod. Axiomatic approach to homology theory. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 31 :117–120, 1945.

[FM13] Greg Friedman and James E. McClure. Cup and cap products in intersection (co)homology. *Adv. Math.*, 240 :383–426, 2013.

[GM80] Mark Goresky and Robert MacPherson. Intersection homology theory. *Topology*, 19(2) :135–162, 1980.

[GM83] Mark Goresky and Robert MacPherson. Intersection homology. II. *Invent. Math.*, 72(1) :77–129, 1983.

[Gro68] Alexander Grothendieck. Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L [see 1608788]. In *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, volume 3 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 31–45. North-Holland, Amsterdam, 1968.

[Hai18] Peter J. Haine. A model for the ∞-category of stratified spaces. *arXiv e-prints*, page arXiv :1811.01119, Nov 2018.

[HHR11] Michael A. Hill, Michael J. Hopkins, and Douglas C. Ravenel. A solution to the Arf-Kervaire invariant problem. In *Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2010*, pages 21–63. Int. Press, Somerville, MA, 2011.

[Hop26] Vektorfelder in n-dimensionalen mannigfaltigkeiten. *Math. Annalen 96*, pages 225–250, 1926.

[Joy] André Joyal. *The Theory of Quasi-categories and its Applications*. `http://mat.uab.cat/~kock/crm/hocat/advanced-course/Quadern45-2.pdf`.

[Joy02] A. Joyal. Quasi-categories and Kan complexes. volume 175, pages 207–222. 2002. Special volume celebrating the 70th birthday of Professor Max Kelly.

[Lur] Jacob Lurie. *Higher Algebra*. `http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf`.

[Lur09] Jacob Lurie. *Higher topos theory*, volume 170 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[Mil65] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Based on notes by David W. Weaver. The University Press of Virginia, Charlottesville, Va., 1965.

[Mil13] David A. Miller. Strongly stratified homotopy theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365(9) :4933–4962, 2013.

[MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, N. J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 76.

[Poi95] Henri Poincaré. Analysis situs. *Journal de l'école Polytechnique*, pages 1–123, 1895.

[Pro13] The Univalent Foundations Program. *Homotopy type theory—univalent foundations of mathematics*. The Univalent Foundations Program, Princeton, NJ ; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 2013.

[Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[Qui88] Frank Quinn. Homotopically stratified sets. *Journal of the American Mathematical Society*, 1(2) :441–499, 1988.

[Rie51] Bernhard Riemann. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. PhD thesis, 1851.

[Sch18] Peter Scholze. p-adic geometry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. I. Plenary lectures*, pages 899–933. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018.

[Tre09] David Treumann. Exit paths and constructible stacks. *Compos. Math.*, 145(6) :1504–1532, 2009.

[Č32] Eduard Čech. Höherdimensionale homotopiegruppen. *Verhandlungen des Internationalen Mathematikerkongress*, 1932.

[Wey55] Hermann Weyl. *Die Idee der Riemannschen Fläche*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1955. 3te Aufl.

[Whi49] J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy. I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 :213–245, 1949.

[Whi65] Hassler Whitney. Tangents to an analytic variety. *Ann. of Math. (2)*, 81 :496–549, 1965.

[Woo09] Jon Woolf. The fundamental category of a stratified space. *J. Homotopy Relat. Struct.*, 4(1) :359–387, 2009.