

# TOPOLOGIES ET DISTANCES SUR LES ESPACES DE RAN

SYLVAIN DOUTEAU ET MARIE LABEYE

## TABLE DES MATIÈRES

Introduction	2
1. Préliminaires	4
1.1. Espaces de configurations	4
1.2. Espaces de Ran et topologie faible	5
1.3. Topologie et distance de Hausdorff	6
1.4. Troncations de l'espace de Ran	8
1.5. Chemins continus sur les espaces de Ran	9
1.6. Variétés riemannienne	13
2. Distances curvilignes	14
2.1. Chemins et relèvements $C^1$ par morceaux	14
2.2. Longueurs des relèvements et des chemins	16
2.3. Distances curvilignes	18
2.4. Distances curvilignes et strates	20
3. Distances et combinatoire	27
3.1. Distances combinatoires	28
3.2. Chemins géodésiques et relations	29
3.3. Comparaison des distances	31
3.4. Fusions et bijections	32
3.5. Réalisation de la distance combinatoire	38
3.6. Chemins $\alpha$ -optimaux	41
4. Distances et topologies	44
4.1. Comparaisons des topologies pondérées	46
4.2. Comparaison aux topologies classiques	48
4.3. Quelques conséquences pour la topologie faible	51
References	52

## INTRODUCTION

Les espaces de configurations sont des invariants fins d'un espace topologique. Ils sont plus fins que le type d'homotopie en général. En effet, il existe des espaces homotopiquement équivalents dont les espaces de configurations ne sont pas homotopiquement équivalents (le point et la droite, par exemple). Le lien entre le type d'homotopie d'un espace et ceux de ses espaces de configurations est un sujet très étudié, et encore en grande partie ouvert (voir par exemple [Idr19, CILW18]). Étant donné un espace  $M$ , on obtient un invariant encore plus fin en considérant l'espace de Ran associé à  $M$ , qui n'est autre que l'union des espaces de configurations  $\text{Ran}(M) = \coprod_n \text{Conf}_n(M)$ . Bien sur, il faut définir une topologie appropriée sur  $\text{Ran}(M)$ . Le plus naturel est de considérer les sous-espaces  $\text{Ran}_{\leq n}(M) = \coprod_{k=1}^n \text{Conf}_k(M)$ , et de les munir de la topologie quotient  $M^n \rightarrow \text{Ran}_{\leq n}(M)$ . On peut alors définir la topologie sur  $\text{Ran}(M)$  comme celle de l'union croissante (i.e. de la colimite)  $\text{Ran}(M) = \cup_n \text{Ran}_{\leq n}(M)$ . On l'appellera la **topologie faible** sur  $\text{Ran}(M)$ , et on la notera  $\tau_w$ . On obtient alors un espace stratifié,  $\text{Ran}(M) \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ , où la stratification est donnée par le cardinal. La dépendance du type d'homotopie stratifié de  $\text{Ran}(M)$  en le type d'homotopie de  $M$  est relativement moins explorée que celle des  $\text{Conf}_n(M)$ . En effet, ces derniers forment les strates de  $\text{Ran}(M)$ , mais une partie de l'information sur le type d'homotopie stratifié de  $\text{Ran}(M)$  est contenue dans les recollements entre strates.

Les espaces de Ran apparaissent aussi en homologie de factorisation. Dans ce contexte, on considère des fonctions qui associent aux parties finies d'un espace  $S \subset M$ , des objets algébriques  $A_S$ , et on demande que cette association soit continue. Spécifier cette condition de continuité revient à fixer une topologie sur  $\text{Ran}(M) = \{S \subset M \mid \text{card}(S) < \infty\}$ . Cette définition de l'ensemble  $\text{Ran}(M)$  est bien entendu équivalente à la précédente, mais amène à considérer  $\text{Ran}(M)$  comme un sous-espace de l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(M)$ . Par ailleurs, dès que  $M$  est métrisable,  $\mathcal{P}(M)$  l'est aussi, et une métrique est donnée par la distance de Hausdorff. De ce point de vue là, il est naturel de considérer  $\text{Ran}(M)$ , muni de la topologie induite par la distance de Hausdorff, que l'on notera  $\tau_H$ . Il faut néanmoins noter qu'à la fois la topologie faible [BD04] et la topologie de Hausdorff [Lur17, Definition 5.5.1.2, Remark 5.5.1.5] ont été considérées du point de vue de l'homologie de factorisation, ainsi qu'au moins une troisième topologie [CG17], plus grossière encore que la topologie de Hausdorff. (voir [CL21], pour une étude approfondie de ces trois topologies)

Bien que toutes les deux naturelles, la topologie faible et la topologie de Hausdorff ont des propriétés très différentes. Lorsque  $M$  admet une structure de CW-complexe, on peut munir  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$  d'une structure de CW-complexe. Alors que  $(\text{Ran}(M), \tau_H)$  n'admet (presque) jamais de structure de CW-complexe. D'autre part,  $(\text{Ran}(M), \tau_H)$  est métrisable, et la distance de Hausdorff est relativement élémentaire à calculer, alors que  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$  n'est pas métrisable, et ses ouverts sont très difficiles à décrire. Enfin, pour la topologie de Hausdorff,  $\text{Ran}(M)$  est coniquement stratifié au sens de Lurie, alors qu'on peut montrer aisément que  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$  n'est pas coniquement stratifié. Finalement, de façon surprenante, les sous-espaces  $\text{Ran}_{\leq n}(M) \subset \text{Ran}(M)$  héritent de la même topologie, que l'on considère la topologie faible ou la topologie de Hausdorff sur  $\text{Ran}(M)$ .

Dans cet article, on introduit de nouvelles topologies sur l'ensemble  $\text{Ran}(M)$  – lorsque  $M$  est une variété riemannienne (complète et connexe) – que l'on peut interpréter comme des interpolations entre la topologie de Hausdorff et la topologie faible. Ces nouvelles topologies,  $\tau^\alpha$ , proviennent de distances,  $d^\alpha$ , indexées par des poids,  $\alpha$ . Ces distances reflètent la géométrie des espaces de  $\text{Ran}(M)$ , et sont construites comme la longueur de certaines "géodésiques" dans  $\text{Ran}(M)$ . Les géodésiques dans  $\text{Ran}(M)$  parcourent différentes strates, et les poids  $\alpha$  viennent pondérer la contribution de chaque strate à la longueur totale du chemin. On arrive alors au résultat suivant (théorème 4.12)

**Théorème.** *La collection des  $\tau^\alpha$  forme une famille infinie non-dénombrable de topologies distinctes sur  $\text{Ran}(M)$ , et on a*

$$(\text{Ran}(M), \tau_w) \cong \varprojlim (\text{Ran}(M), \tau^\alpha)$$

En particulier, on obtient que la topologie faible sur  $\text{Ran}(M)$ , bien que non métrisable, peut être obtenue comme une limite inverse d'espaces métriques. Une conséquence immédiate de ce théorème est l'obtention d'un critère de continuité pour une application  $f: X \rightarrow \text{Ran}(M)$ .

Cet article est organisé comme suit :

La Section 1 contient un rappel sur différentes propriétés des espaces de  $\text{Ran}$ . On y rappelle notamment, sans preuve, certaines propriétés connues que l'on redémontrera à la fin de la Section 4. On redémontre aussi quelques énoncés élémentaires sur  $\text{Ran}(M)$  dont on se servira dans la suite de cet article. Enfin, cette section contient quelques rappels sur les variétés riemanniennes.

Dans la Section 2, on donne une première définition des distances pondérées sur  $\text{Ran}(M)$ , en étudiant les longueurs de chemins (définition 2.13), dans une dernière partie, (Section 2.4) on se concentre sur certains chemins particuliers, les chemins crénelés, dont on montre qu'ils sont suffisant pour calculer la distance.

On définit de nouvelles distances dans la Section 3, en termes purement combinatoires, puis on montre qu'elles coïncident avec les distances de la Section 2 (théorème 3.10). Une fois cette égalité prouvé, on en déduit que pour deux configurations  $S, T \in \text{Ran}(M)$ , la distance  $d^\alpha(S, T)$  est donnée par la longueur d'un chemin  $\alpha$ -optimal entre  $S$  et  $T$ . A partir de cette section, on suppose que la variété riemannienne  $M$  est complète et connexe.

Dans une dernière section (Section 4), on étudie les topologies  $\tau^\alpha$  induites par les nouvelles distances. On montre que leur limite est la topologie faible 4.12, et on déduit quelques conséquences immédiates pour la topologie faible Section 4.3.

Cet article est une version préliminaire, et certains résultats sont en cours de rédaction, et seront inclus dans les versions futures. Parmi eux :

- Les espaces  $(\text{Ran}(M), \tau^\alpha)$  sont coniquement stratifiés, lorsque  $M$  est une variété riemannienne (complète?).
- La définition de  $d^\alpha$ , via sa forme combinatoire, est généralisable à  $M$  un espace métrique quelconque, et son interprétation sous sa forme curviligne est valable pour  $M$  une variété riemannienne connexe (pas nécessairement complète).

Par ailleurs, on s'intéresse particulièrement à prouver deux énoncés, qui seront, possiblement, dans les versions futures.

- L'espace de  $\text{Ran}(M)$  muni de la topologie faible est coniquement stratifié au sens naïf, i.e. il est localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^q \times c(L)$ , où l'espace  $c(L)$  est muni de la topologie quotient  $L \times [0, 1[ \rightarrow c(L)$  et non de la topologie teardrop.
- Les  $(\infty)$ -catégories de chemins sortant  $\text{Exit}(\text{Ran}(M), \tau^\alpha)$ , peuvent être exprimées en termes des chemins  $\alpha$ -optimaux.

## 1. PRÉLIMINAIRES

On rappelle ici quelques notions sur les espaces étudiés dans cet article : les variétés riemanniennes, et les espaces de Ran sur ces variétés. On commencera par définir les espaces de Ran, ainsi que leurs topologies usuelles (section ?). On présentera ensuite quelques propriétés des chemins continus sur les espaces de Ran, notamment en terme de leur relèvements. Enfin, on rappellera quelques notions classiques sur les variétés riemanniennes.

**1.1. Espaces de configurations.** On commence par définir les espaces de configurations.

**Définition 1.1.** Soient  $M$  un espace topologique et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

L'espace des **configurations ordonnées** (de cardinal  $n$ ) sur  $M$ , noté  $\text{Conf}_n^{\text{ord}}(M)$ , est l'ensemble des  $n$ -uplets de  $M^n$  dont les éléments sont deux à deux distincts, i.e.:

$$\text{Conf}_n^{\text{ord}}(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \neq x_j, \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}\} \subset M^n,$$

muni de la topologie induite par l'inclusion.

*Remarque 1.2.* Si  $M$  est une variété de dimension  $\geq 1$ , on vérifie aisément que  $\text{Conf}_n^{\text{ord}}(M)$  est dense dans  $M^n$ , pour tout  $n \geq 1$ .

**Définition 1.3.** Soit  $M$  un espace topologique, et soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$  et  $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Alors, pour tout  $(x_1, \dots, x_m) \in M^m$ , on note  $f \cdot (x_1, \dots, x_m) = (x_{f(1)}, \dots, x_{f(m)}) \in M^n$ .

*Remarque 1.4.* Si  $n = m$ , cela définit une action du groupe symétrique  $\Sigma_n = \{f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid f \text{ bijective}\}$  sur  $M^n$  qui se restreint en une action de  $\text{Conf}_n^{\text{ord}}(M)$ .

**Définition 1.5.** L'espace des **configurations** sur  $M$ , noté  $\text{Conf}_n(M)$ , est le quotient de  $\text{Conf}_n^{\text{ord}}(M)$  par l'action du groupe symétrique  $\Sigma_n$ , muni de la topologie quotient.

**Proposition 1.6.** *Si  $M$  est séparé, alors l'application quotient  $\text{Conf}_n^{\text{ord}}(M) \rightarrow \text{Conf}_n(M)$  est un revêtement.*

*Démonstration.* Comme  $M$  est séparé, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{Conf}_n^{\text{ord}}(M)$  on a une famille  $(U_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  de voisinages disjoints des  $x_i$  dans  $M$ . Le produit  $U = \prod_{i=1}^n U_i$  est un voisinage de  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\text{Conf}_n^{\text{ord}}(M)$  tel que, pour tout  $\sigma \in \Sigma_n$ , on a  $\sigma \cdot U \cap U = \emptyset$ . En particulier, l'action du groupe symétrique sur  $\text{Conf}_n^{\text{ord}}(M)$  est totalement discontinue. Comme  $\Sigma_n$  agit par homéomorphisme, l'application quotient est donc un revêtement.  $\square$

**1.2. Espaces de Ran et topologie faible.** On peut maintenant définir l'ensemble sous-jacent aux espaces de Ran comme l'union disjointe des espaces de configurations. Il restera à définir une topologie sur l'ensemble  $\text{Ran}(M)$ . On va rappeler les deux définitions les plus couramment utilisés, d'abord la topologie faible, dans cette sous-section, puis la topologie de Hausdorff et sa distance associée, dans la section suivante. Le reste de cet article sera consacré à définir et étudier d'autres topologies, intermédiaires.

**Définition 1.7.** Soit  $M$  un espace topologique, l'**espace de Ran** associé à  $M$ , noté  $\text{Ran}(M)$ , a pour ensemble sous-jacent l'union des ensembles de configurations :

$$\text{Ran}(M) = \coprod_{i \geq 1} \text{Conf}_i(M).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , la **troncation** de  $\text{Ran}(M)$ , notée  $\text{Ran}_{\leq n}(M)$ , est le sous-ensemble défini par

$$\text{Ran}_{\leq n}(M) = \prod_{i=1}^n \text{Conf}_i(M).$$

**Définition 1.8.** Soient  $M$  un espace topologique, et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit

$$\begin{aligned} \pi_n: M^n &\rightarrow \text{Ran}(M) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \{x_1, \dots, x_n\}. \end{aligned}$$

On appelle **topologie faible** sur  $\text{Ran}(M)$ , noté  $\tau_w$ , la topologie finale pour les  $\pi_n$ .

*Remarque 1.9.* On peut donner une autre définition de la topologie faible. Pour  $n \geq 1$ , on munit  $\text{Ran}_{\leq n}(M) = \prod_{k=1}^n \text{Conf}_k(M)$  de la topologie quotient, associé à l'application  $\pi_n: M^n \rightarrow \text{Ran}_{\leq n}(M)$ . On note alors que pour ces topologies, l'inclusion  $\text{Ran}_{\leq n}(M) \rightarrow \text{Ran}_{\leq n+1}(M)$  est l'inclusion d'un sous-espace fermé. La topologie faible est alors celle de l'union croissante

$$(\text{Ran}(M), \tau_w) = \bigcup_{n \geq 1} \text{Ran}_{\leq n}(M)$$

On vérifie aisément que les deux topologies coïncident. Si  $U \subset \text{Ran}(M)$  est un sous-ensemble de  $\text{Ran}(M)$ , il est ouvert pour la topologie faible si et seulement si  $\pi_n^{-1}(U)$  est un ouvert de  $M^n$  pour tout  $n \geq 1$ . D'autre part,  $U \cap \text{Ran}_{\leq n}(M)$  est ouvert si et seulement si  $\pi_n^{-1}(U \cap \text{Ran}_{\leq n}(M))$  est ouvert. Comme,  $\text{Ran}_{\leq n}(M)$  est l'image de  $\pi_n$ , les deux topologies coïncident effectivement. En particulier,  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$  s'obtient naturellement comme la colimite de son squelette.

On fait aussi la remarque suivante, qui sera utile dans la suite de cet article.

*Remarque 1.10.* La restriction de  $\pi_n$  coïncide avec l'application quotient  $\text{Conf}_n^{\text{ord}}(M) \rightarrow \text{Conf}_n(M)$ .

On rappelle ici deux énoncés classiques sur  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$ , que l'on redémontrera comme des conséquences immédiates du théorème principal (proposition 4.6 et corollaire 4.15)

**Proposition 1.11.** *Soit  $M$  une variété riemannienne connexe et complète de dimension  $\geq 1$ . L'espace  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$  n'admet pas de base dénombrable de voisinages. En particulier,  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$  n'est pas métrisable.*

**Proposition 1.12.** *Soit  $M$  une variété riemannienne connexe et complète, et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de configurations dans  $\text{Ran}(M)$ . Si  $(S_n)$  converge pour la topologie faible, alors la suite des cardinaux,  $(\text{card}(S_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.*

On note que ces deux énoncés sont valables plus généralement, on les a énoncés ici sous les hypothèses sous lesquels on les montre dans la Section 4.3.

On donne finalement la propriété suivante, qui illustre une propriété importante des ouverts de  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$ .

**Proposition 1.13.** *Soit  $M$  une variété de dimension  $\geq 1$ ,  $U \subset \text{Ran}(M)$  un ouvert non vide pour la topologie faible, et  $S \in U$ . Alors, pour tout  $n \geq \text{card}(S)$ , il existe  $T \in U$  tel que  $\text{card}(T) = n$ .*

*Démonstration.* Notons  $k = \text{card}(S)$ , et fixons une énumération  $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Soit  $n \geq k$ . Par définition,  $\pi_n^{-1}(U)$  est un ouvert de  $M^n$ . Or, l'élément  $X = (x_1, \dots, x_k, x_k, \dots, x_k) \in M^n$  vérifie  $\pi_n(X) = S$ , d'où on déduit que  $\pi_n^{-1}(U)$  est non-vide. Or,  $\text{Conf}_n^{\text{ord}}(M) \subset M^n$  est dense dans  $M^n$ , d'où on déduit que  $\pi_n^{-1}(U) \cap \text{Conf}_n^{\text{ord}}(M)$  est non vide. Si  $Y$  appartient à l'intersection, on a  $\pi_n(Y) \in U$  et  $\text{card}(\pi_n(Y)) = n$ , d'où le résultat.  $\square$

**1.3. Topologie et distance de Hausdorff.** La topologie de Hausdorff sur  $\text{Ran}(M)$  peut être définie sur un espace topologique général. Cependant, lorsque  $M$  est un espace métrique, cette topologie est induite par la distance de Hausdorff,  $d_H$ . Puisqu'on s'intéressera tout particulièrement à la distance de Hausdorff, on supposera à partir de maintenant que  $(M, d_M)$  est un espace métrique.

**Définition 1.14.** La distance de Hausdorff sur  $\text{Ran}(M)$ , notée  $d_H$  est définie par

$$d_H: \text{Ran}(M) \times \text{Ran}(M) \rightarrow [0, +\infty[$$

$$(S, T) \mapsto \max \left\{ \max_{x \in S} \{d_M(x, T)\}, \max_{y \in T} \{d_M(S, y)\} \right\}$$

On appelle topologie de Hausdorff, notée  $\tau_H$ , la topologie induite par la distance de Hausdorff sur  $\text{Ran}(M)$ .

*Remarque 1.15.* La distance de Hausdorff est définie plus généralement sur l'ensemble des parties de  $M$ ,  $\mathcal{P}(M)$ . Dans ce contexte, il s'agit seulement d'une pseudo-distance, mais on obtient bien une distance si l'on se restreint aux sous-espaces fermés de  $M$ .

**Proposition 1.16.** *La topologie faible raffine la topologie de Hausdorff.*

*Démonstration.* Soient  $S \in \text{Ran}(M)$ , et  $r > 0$ . Montrons que  $B_H(S, r) = \{T \in \text{Ran}(M) \mid d_H(S, T) < r\}$  est un ouvert de  $\tau_w$ . Pour cela, fixons  $n \in \mathbb{N}^*$ , et montrons que  $\pi_n^{-1}(B_H(S, r))$  est un ouvert de  $M^n$ . Soit  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \pi_n^{-1}(B_H(S, r))$ . On pose  $\epsilon = r - d_H(S, \pi_n(X)) > 0$ . Soit  $Y = (y_1, \dots, y_n) \in B(x_1, \epsilon) \times \dots \times B(x_n, \epsilon)$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$d(x_i, \pi_n(Y)) \leq d(x_i, y_i) < \epsilon,$$

et

$$d(y_i, \pi_n(X)) \leq d(y_i, x_i) < \epsilon.$$

Et donc

$$d_{\mathbb{H}}(\pi_n(X), \pi_n(Y)) = \max \left\{ \max_{x \in \pi_n(X)} \{d(x, \pi_n(Y))\}, \max_{y \in \pi_n(Y)} \{d(\pi_n(X), y)\} \right\} < \epsilon,$$

et finalement

$$d_{\mathbb{H}}(S, \pi_n(Y)) \leq d_{\mathbb{H}}(S, \pi_n(X)) + d_{\mathbb{H}}(\pi_n(X), \pi_n(Y)) < d_{\mathbb{H}}(S, \pi_n(X)) + \epsilon = r.$$

On a donc  $Y \in \pi_n^{-1}(B_{\mathbb{H}}(S, r))$ , d'où  $B(x_1, \epsilon) \times \cdots \times B(x_n, \epsilon) \subset \pi_n^{-1}(B_{\mathbb{H}}(S, r))$  qui est bien ouvert dans  $M^n$ .  $\square$

En particulier, on a montré que la fonction  $\text{Id}: (\text{Ran}(M), \tau_w) \rightarrow (\text{Ran}(M), \tau_{\mathbb{H}})$  est continue.

**Définition 1.17.** On note  $\mathbb{N}_{\geq 1}$  l'ensemble ordonné des entiers strictement positifs, muni de la topologie d'Alexandrov, i.e. la topologie dont les ouverts sont les sous-ensembles  $\mathbb{N}_{\geq p} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq p\}$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$ .

On note  $\text{card}$  la fonction cardinal

$$\begin{aligned} \text{card}: \text{Ran}(M) &\rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1} \\ S &\mapsto \text{card}(S) \end{aligned}$$

**Proposition 1.18.** *La fonction  $\text{card}$  est continue sur  $(\text{Ran}(M), \tau_{\mathbb{H}})$ , et donc sur  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$ . En particulier, elle définit une stratification.*

*Démonstration.* Soient  $M$  un espace métrique et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons que  $\text{Ran}(M) \setminus \text{Ran}_{\leq n}(M)$  est ouvert dans  $\tau_{\mathbb{H}}$ . Soit  $S \in \text{Ran}(M) \setminus \text{Ran}_{\leq n}(M)$ . Si  $n = 0$ , il n'y a rien à montrer, sinon,  $\text{card}(S) > n \geq 1$  et on pose alors  $\epsilon = \frac{1}{2} \min_{x \neq y \in S} \{d_M(x, y)\}$ . Montrons alors que  $B_{\mathbb{H}}(S, \epsilon) \subset \text{Ran}(M) \setminus \text{Ran}_{\leq n}(M)$ . Soit  $T \in B_{\mathbb{H}}(S, \epsilon)$ . Pour tout  $x \in S$ , il existe  $y_x \in T$  tel que

$$d_M(x, y_x) = d_M(x, T) \leq d_{\mathbb{H}}(S, T) < \epsilon.$$

De plus, si  $x' \neq x \in S$ , alors on a

$$d_M(x', y_x) \geq d_M(x', x) - d_M(x, y_x) > \min_{x \neq y \in S} \{d_M(x, y)\} - \epsilon = \epsilon.$$

et donc  $y_x \neq y_{x'}$ . Ainsi  $\text{card}(T) \geq \text{card}(S) > n$ , donc  $T \in \text{Ran}(M) \setminus \text{Ran}_{\leq n}(M)$  et  $B_{\mathbb{H}}(S, \epsilon) \subset \text{Ran}(M) \setminus \text{Ran}_{\leq n}(M)$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

*Remarque 1.19.* En particulier, on note que les espaces de configurations  $\text{Conf}_n(M)$  sont simplement les **strates** de l'espace stratifié  $\text{Ran}(M) \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ . On note que la topologie de ces strates est la même que l'on considère sur  $\text{Ran}(M)$  la topologie  $\tau_w$  ou  $\tau_{\mathbb{H}}$ .

On déduit aussi de la proposition précédente le résultat suivant.

**Corollaire 1.20.** *Soit  $M$  un espace métrique. Alors, pour tout  $n \geq 1$ , la troncation  $\text{Ran}_{< n}(M)$  est un fermé de  $\text{Ran}(M)$ .*

On explicite les propriétés de ces troncations dans la sous-section suivante.

**1.4. Troncations de l'espace de Ran.** Bien que la topologie faible et la topologie de Hausdorff soient très différentes en général, elles coïncident sur toutes les troncations de  $\text{Ran}(M)$ , c'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 1.21.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les topologies induites par  $\tau_w$  et  $\tau_H$  sur  $\text{Ran}_{\leq n}(M)$  coïncident.*

*Démonstration.* Soit  $U \subset \text{Ran}(M)$  un ouvert de  $\tau_w$ . Montrons que  $U \cap \text{Ran}_{\leq n}(M)$  est ouvert pour la topologie induite par  $\tau_H$  sur  $\text{Ran}_{\leq n}(M)$ . Soit  $S = \{x_1, \dots, x_m\} \in U \cap \text{Ran}_{\leq n}(M)$ . Soit  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  surjective. On a  $f \cdot (x_1, \dots, x_m) \in \pi_n^{-1}(S) \subset \pi_n^{-1}(U)$ . Par définition de  $\tau_w$ ,  $\pi_n^{-1}(U)$  est ouvert dans  $M^n$ . Il existe donc  $\epsilon_f > 0$  tel que  $B_f = B(x_{f(1)}, \epsilon) \times \dots \times B(x_{f(n)}, \epsilon) \subset \pi_n^{-1}(U)$ . On pose alors  $\epsilon = \min\{\epsilon_f \mid f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\} \text{ surjective}\}$ ,  $r = \min\{d(x, y) \mid x \neq y \in S\}$  et  $\delta = \min\{\epsilon, \frac{r}{2}\}$ .

Soit  $T = \{y_1, \dots, y_k\} \in B_H(S, \delta) \cap \text{Ran}_{\leq n}(M)$ . Alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , il existe  $j_i \in \{1, \dots, m\}$ , tel que  $d(y_i, x_{j_i}) = d(y_i, S) \leq d_H(S, T) < \delta$ . De plus,  $j_i$  est unique, car pour tout  $j \neq j_i \in \{1, \dots, m\}$

$$d(y_i, x_j) \geq d(x_j, x_{j_i}) - d(y_i, x_{j_i}) > d(x_j, x_{j_i}) - \delta \geq d(x_j, x_{j_i}) - \frac{r}{2} \geq \frac{r}{2} \geq \delta.$$

On définit alors

$$f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$$

$$i \mapsto \begin{cases} j_i & \text{si } i \leq k \\ j_k & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui est bien surjective car pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , il existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $d(x_j, y_i) = d(x_j, T) < \delta$ , et donc  $j = j_i$ . Ainsi  $f \cdot (y_1, \dots, y_k, \dots, y_k) \in B_f$  et  $\pi_n(f \cdot (y_1, \dots, y_k, \dots, y_k)) = T$ . Donc  $T \in \pi_n(B_f) \subset U$ , et donc  $B_H(S, \delta) \cap \text{Ran}_{\leq n}(M) \subset U \cap \text{Ran}_{\leq n}(M)$ .  $\square$

On aura aussi besoin, dans la suite de cet article, de la proposition suivante.

**Proposition 1.22.** *Soit  $n \geq 1$ . Si  $M$  est une variété riemannienne complète, la troncation  $\text{Ran}_{\leq n}(M)$ , munie de la distance de Hausdorff  $d_H$ , est un espace métrique complet.*

*Démonstration.* Soit  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $(\text{Ran}_{\leq n}(M), d_H)$ . Par hypothèse, il existe une suite de réels positifs  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , décroissante, telle que  $\lim u_k = 0$  et telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et pour tous  $l, m \geq k$ ,  $d_H(S_l, S_m) \leq u_k$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ , et  $x \in S_k$ . Alors, par hypothèse, pour tout  $l \geq k$ , on peut trouver  $x_l \in S_l$  tel que  $d_M(x, x_l) \leq d_M(S_k, S_l) \leq u_k$ . Considérons alors la suite  $(x_l)_{l \geq k}$ . Elle est à valeur dans la boule fermée  $B_F(x, u_k)$ , qui est compacte, car  $M$  est une variété riemannienne complète, et admet donc au moins une valeur d'adhérence. On en choisit une, qu'on note  $x_\infty$ , et on pose  $f(k, x) = x_\infty$ . On définit alors

$$S = \{f(k, x) \mid k \in \mathbb{N}, x \in S_k\}.$$

On remarque que  $S \subset M$  dépend *a priori* d'une infinité de choix. On va montrer que  $S$  est bien définie, vérifie  $S \in \text{Ran}_{\leq n}(M)$ , et est la limite de la suite  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Montrons dans



un premier temps que la suite  $(S_k)$  converge vers  $S$  dans  $\mathcal{P}(M)$  (voir la remarque 1.15). Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Par définition, de la distance de Hausdorff, on a

$$d_H(S_k, S) = \max\{\max_{x \in S_k}\{d_M(x, S)\}, \max_{y \in S}\{d_M(S_k, y)\}\}$$

On va évaluer les deux termes séparément. D'une part, pour tout  $x \in S_k$ , il existe  $f(k, x) \in S$  qui vérifie, par construction  $d_M(x, f(k, x)) \leq u_k$ . D'autre part, si  $y \in S$ , il existe  $l \in \mathbb{N}$ , et  $x' \in S_l$  tel que  $y = f(l, x')$ . On note en particulier que  $d_M(S_l, y) \leq u_l$ , par définition. On distingue deux cas.

- Si  $l \geq k$ , on a  $d_H(S_k, S_l) \leq u_k$ , et donc  $d_M(S_k, y) \leq d_H(S_k, S_l) + d_M(S_l, y) \leq u_k + u_l \leq 2u_k$ .
- Si  $l \leq k$ , on considère la suite  $(x'_m)_{m \geq l}$  dont une valeur d'adhérence est  $y$ . Par construction, il existe  $l' \geq k$  tel que  $d_M(x'_{l'}, y) \leq u_k$ . On a alors  $d_M(S_{l'}, y) \leq u_k$ . Finalement, il vient  $d_M(S_k, y) \leq d_H(S_k, S_{l'}) + d_M(S_{l'}, y) \leq 2u_k$ .

On a finalement,  $d_H(S_k, S) \leq 2u_k$ , d'où on déduit  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_H(S_k, S) = 0$ , ce qui montre que la suite  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $S$  pour la distance de Hausdorff. Il reste à montrer que  $\text{card}(S) \leq n$ . Par l'absurde, supposons que  $\text{card}(S) \geq n + 1$ , alors il existe  $\tilde{S} \subset S$  tel que  $\text{card}(\tilde{S}) = n + 1$ . Mais alors, par le lemme 1.23, il existe  $\delta_{\tilde{S}} > 0$  tel que, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} d_H(S_k, S) &\geq \max_{y \in \tilde{S}}\{d_M(S_k, y)\} \\ &\geq \max_{y \in \tilde{S}}\{d_M(S_k, y)\} \\ &\geq \delta_{\tilde{S}} \end{aligned}$$

ce qui est absurde, car  $d_H(S_k, S)$  tend vers 0. On en déduit finalement que la suite de Cauchy  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\text{Ran}_{\leq n}(M)$ .  $\square$

**Lemme 1.23.** *Soient  $n \geq 1$ ,  $S \subset M$  tel que  $\text{card}(S) = n + 1$ . Alors, il existe  $\delta_S > 0$  tel que pour tout  $T \subset M$  vérifiant  $\text{card}(T) \leq n$ , on a*

$$\max_{y \in S}\{d_M(T, y)\} \geq \delta_S$$

*Démonstration.* On pose  $\delta_S = \frac{\min_{y \neq z \in S}\{d_M(y, z)\}}{2} > 0$ . Soit  $T \subset M$  une configuration de cardinal  $\leq n$ . Pour tout  $y \in S$ , il existe  $x_y \in T$  tel que  $d_M(x_y, y) = d_M(T, y)$ . Comme  $\text{card}(T) < \text{card}(S)$ , il existe  $y \neq z \in S$  tels que  $x_y = x_z$ . Mais alors,  $d_M(x_y, y) + d_M(x_z, z) \geq d_M(y, z) \geq 2\delta_S$ . D'où on déduit

$$\delta_S \leq \max\{d_M(x_y, y), d_M(x_z, z)\} \leq \max_{y \in S}\{d_M(T, y)\}$$

$\square$

**1.5. Chemins continus sur les espaces de Ran.** A partir de maintenant, on considère que  $M$  est une variété riemannienne (dont on note toujours la distance  $d_M$ ), et, sauf mention explicite d'une autre topologie, on considère l'espace de Ran muni de la topologie de Hausdorff. On va s'intéresser dans la suite aux propriétés des chemins continus dans cet espace. En particulier, la proposition 1.18 implique que le cardinal d'un chemin continu est

continu. Nous allons commencer par quelques exemples de chemins continus, afin d'illustrer ce qui peut être déduit de cette propriété.

*Exemple 1.24.* On va donner quelques exemples de chemins dans  $\text{Ran}(M)$ , dans le cas particulier où  $M = \mathbb{R}$ . Dans ce cas, on peut représenter un chemin  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \text{Ran}(M)$  par le graphe dans  $\mathbb{R}^2$  de la multi-fonction  $\gamma(t)$ , i.e. en considérant le sous-ensemble  $\{(t, x) \mid t \in [0, 1], x \in \gamma(t)\} \subset \mathbb{R}^2$ . Explicitons les exemples de la Fig. 1. De gauche à droite, et de haut en bas :

- Le premier exemple est du type le plus simple possible. On considère deux chemins dans  $\mathbb{R}$ , appelons les  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , reliant respectivement  $x_1$  et  $y_1$  et  $x_2$  et  $y_2$ , et dont les graphes sont disjoints. Le chemin  $\gamma$  est simplement l'union disjointe  $\gamma(t) = \{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\}$ , et l'image de  $\gamma$  est incluse dans  $\text{Conf}_2(M)$ . Comme les deux chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont disjoints, pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a bien  $\text{card}(\gamma(t)) = \text{card}\{\gamma_1(t), \gamma_2(t)\} = 2$ .
- Le deuxième exemple représente ce qu'on appellera dans la suite une fusion (voir définition 3.12), ou plus exactement, un chemin direct associé à une fusion (voir Section 3.2).  $\gamma$  relie une configuration de cardinal 3,  $\{x_1, x_2, x_3\}$  à une configuration de cardinal 2,  $\{y_1, y_2\}$ , et on peut décomposer  $\gamma$  en deux composantes connexes. D'une part, on a un chemin constant,  $\gamma_1$ , qui relie  $x_1$  à  $y_1 = x_1$ . Et d'autre part, les deux points  $x_2$  et  $x_3$  se rapprochent progressivement pour fusionner en  $t = 1$  sur  $y_2$ . On peut expliciter ce chemin en en donnant un relèvement dans  $M^3$ ,  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3): [0, 1] \rightarrow M^3$ , où  $\gamma_1$  est le chemin constant égal à  $x_1$ ,  $\gamma_2$  est un chemin en ligne droite entre  $x_2$  et  $y_2$ , et  $\gamma_3$  un chemin en ligne droite entre  $x_3$  et  $y_2$ . On a alors  $\gamma(t) = \{\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)\}$ , mais comme  $\gamma_2(1) = \gamma_3(1) = y_2$ , on a  $\text{card}(\gamma(1)) = 2$ , et  $\text{card}(\gamma(t)) = 3$ , pour  $t \in [0, 1[$ . On note que la fonction  $\text{card}(\gamma(t))$  est néanmoins continue, puisque  $\mathbb{N}_{\geq 1}$  est muni de la topologie de l'ordre (et non de la topologie discrète). En particulier, il suffit de vérifier que l'ensemble des  $t$  tels que  $\text{card}(\gamma(t)) \geq 3$  est ouvert (ou, de façon équivalente, que l'ensemble des  $t$  tels que  $\text{card}(\gamma(t)) \leq 2$  est fermé).
- Les troisième et quatrième exemples sont à comprendre en parallèle. Les deux chemins relient les mêmes configurations,  $\{x_1, x_2, x_3\}$  et  $\{y_1, y_2, y_3\}$ , et, en un certain sens, de la même façon. Le premier des deux chemins correspond à une fusion de  $x_2$  et  $x_3$  sur  $y_3$ , en même temps qu'une séparation de  $x_1$  en  $y_1$  et  $y_2$  (qu'on appellera une anti-fusion, définition 3.12). Ainsi, pour tout  $t \in ]0, 1[$ , on a  $\text{card}(\gamma(t)) = 4$ . Et, de fait, on construit aisément un relèvement dans  $M^4$ . D'autre part, le deuxième chemin vit intégralement dans  $\text{Ran}_{\leq 3}(M)$ , et on peut l'interpréter comme une reparamétrisation du premier chemin. Néanmoins, même si son cardinal est majoré par 3, il n'existe pas de relèvement global de ce chemin dans  $M^3$ . On pourra en revanche subdiviser l'intervalle  $[0, 1]$  en trois morceaux, et trouver de chacun de ces morceaux dans  $M^3$  et  $M^2$  respectivement. C'est de cette observation que vient la notion de relèvement qu'on considérera dans cet article (définition 2.1). On signale aussi que ce genre de reparamétrisation est un des outils important qui permettent de caractériser les distances  $d^\alpha$ . On en fera notamment usage dans la preuve de

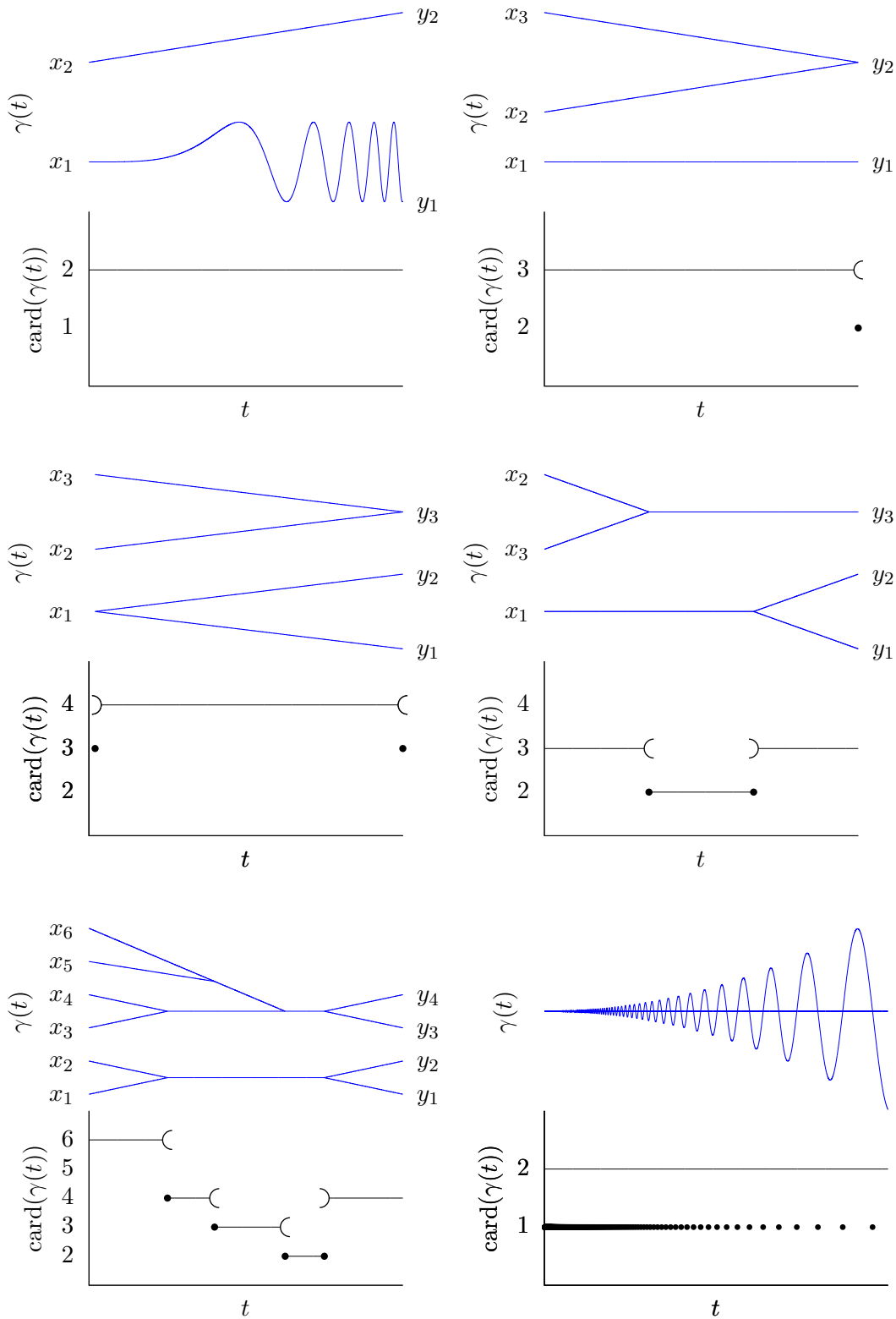


FIGURE 1. Quelques exemples de chemins continus dans  $\text{Ran}(\mathbb{R})$ , ainsi que leur cardinal.

la proposition 2.16, et les chemins représentés ici correspondent exactement à la reparamétrisation effectuée dans la preuve de cette proposition.

- Le cinquième exemple est un exemple typique des chemins qu'on sera amené à considérer. Son cardinal change de valeurs un nombre fini de fois, il s'agit d'un chemin **crénélé** (définition 2.11). Il présente une succession de fusions, et de séparations. On note que son cardinal est décroissant puis croissant. Au fil de la Section 2, on restreindra progressivement la classe des chemins qu'on considère, pour ne plus retenir que ceux qui seront de cette forme (corollaire 2.22).
- Le sixième exemple représente le genre de pathologies qui peuvent émerger lorsqu'on considère des chemins dans  $\text{Ran}(M)$ . Ici, ce chemin peut être décrit comme  $\gamma(t) = \{0, t^2 \sin(1/t)\}$ . Le cardinal de  $\gamma(t)$  varie une infinité de fois le long de son trajet. Pourtant,  $\gamma$  admet un relèvement parfaitement raisonnable dans  $M^2$ ,  $t \mapsto (0, t^2 \sin(1/t))$ , qui est même  $C^1$  par morceaux. De fait, on pourra définir une longueur pour ce chemin (définition 2.8), et le calcul de la distance entre  $\{0\}$  et  $\{0, \sin(1)\}$  fera *a priori* apparaître la longueur de ce chemin (définition 2.13). Cependant, on montrera, (proposition 2.18) que pour tout chemin, il existe un chemin crénélé qui est plus court. Aussi, pour estimer la distance entre 2 configurations, on pourra se dispenser de considérer ce genre de chemins pathologiques.

On aura besoin du lemme suivant dans la Section 2. Puisqu'il ne fait intervenir aucune notion nouvelle, on le prouve ici.

**Lemme 1.25.** *Soit  $M$  un espace métrique. Soient  $n \geq 1$ ,  $I$  un intervalle (fermé, ouvert ou semi-ouvert), et  $\gamma: I \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin continu, tel que  $\text{card}(\gamma(t)) = n$ , pour tout  $t \in I$ . Alors, il existe un relèvement continu de  $\gamma$ ,  $\mu: I \rightarrow M^n$ . De plus, si  $\nu: I \rightarrow M^m$  vérifie  $\pi_m(\nu(t)) = \gamma(t)$ ,  $\forall t \in I$ , alors il existe une surjection  $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  telle que  $\nu = f \cdot \mu$ .*

*Démonstration.* Le chemin  $\gamma$  est de cardinal constant, donc son image est incluse dans  $\text{Conf}_n(M)$ . Or  $\pi_n: \text{Conf}_n^{\text{ord}}(M) \rightarrow \text{Conf}_n(M)$  est un revêtement, on peut donc relever le chemin  $\gamma$  en  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n): I \rightarrow \text{Conf}_n^{\text{ord}}(M) \subset M^n$ .

Soit  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m): I \rightarrow M^m$  tel que  $\pi_m(\nu(t)) = \gamma(t)$ ,  $\forall t \in I$ . Comme  $\gamma(t)$  est de cardinal  $n$  pour tout  $t \in I$ , on doit avoir  $m \geq n$ .

Fixons  $t \in I$ . Comme  $\pi_m(\nu(t)) = \gamma(t)$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\nu_i(t) \in \gamma(t)$  et comme  $\gamma(t) = \pi_n(\mu(t))$  et que  $\text{card}(\gamma(t)) = n$ , il existe un unique  $j_i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\nu_i(t) = \mu_{j_i}(t)$ . On peut ainsi définir une fonction  $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  telle que  $f(i) = j_i$ . Cette fonction est bien surjective car pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mu_j(t) \in \gamma(t)$  et  $\pi_m(\nu(t)) = \gamma(t)$ , donc il existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\nu_i(t) = \mu_j(t)$ . On a donc  $\nu(t) = f \cdot \mu(t)$ .

On pose alors  $\Omega = \{s \in I \mid \nu(s) = f \cdot \mu(s)\}$ . Soit  $s \in I$ , on a  $s \in \Omega$  si et seulement si,

- (1) pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\nu_i(s) = \mu_{f(i)}(s)$ ,
- (2) pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \neq f(i) \Rightarrow \nu_i(s) \neq \mu_j(s)$ .

On note que ces deux conditions sont équivalentes. Si  $s \in I$  vérifie la première condition, alors comme les  $\mu_j(s)$  sont deux à deux distincts,  $s$  vérifie la deuxième condition. Et si

$s \in I$  vérifie la deuxième condition alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , comme  $\nu_i(s) \in \pi_n(\mu(s))$ , il existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\nu_i(s) = \mu_j(s)$ , et donc nécessairement  $\nu_i(s) = \mu_{f(i)}(s)$ .

On considère les deux fonctions suivantes:

$$\begin{aligned} g: I &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ s &\mapsto \sum_{i=1}^m d_M(\nu_i(s), \mu_{f(i)}(s)) \\ h: I &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ s &\mapsto \prod_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq f(i)}}^n d_M(\nu_i(s), \mu_j(s)) \end{aligned}$$

Les fonctions  $g$  et  $h$  sont continues, et par les remarques précédentes, on a  $\Omega = g^{-1}(0) = h^{-1}(]0, +\infty[)$ . On en déduit que  $\Omega$  est un ouvert-fermé. Comme  $t \in \Omega$  par définition, et comme  $\Omega \subset I$  qui est connexe, on a  $\Omega = I$ .  $\square$

**1.6. Variétés riemannienne.** Dans cet article,  $M$  sera une variété riemannienne, qu'on supposera **complète**, à partir de la Section 3.2. On notera  $\|-\| : TM \rightarrow [0, +\infty[$  la norme sur son espace tangent et  $d_M$  la distance induite sur  $M$ , définie pour tout  $x, y \in M$  par

$$d_M(x, y) = \inf \left\{ \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right\}$$

où  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  parcourt les chemins  $C^1$  par morceaux de  $x$  à  $y$  dans  $M$ .

*Remarque 1.26.* Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors on peut munir  $M^n$  d'une structure de variété riemannienne, de norme  $\|-\|_2 : (u_1, \dots, u_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2}$ . Or, dans ce qui suit, on va considérer une autre norme, qui ne provient pas d'une structure riemannienne, mais qui induit une distance équivalente.

**Définition 1.27.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\|-\|_{\Sigma} : TM^n \rightarrow [0, +\infty[$  la norme définie par

$$\|(u_1, \dots, u_n)\|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \|u_i\|$$

et  $d_{\Sigma}$  la distance induite sur  $M^n$

$$\begin{aligned} d_{\Sigma}: M^n \times M^n &\rightarrow [0, +\infty[ \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &\mapsto \sum_{i=1}^n d_M(x_i, y_i) = \inf \left\{ \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\Sigma} dt \right\} \end{aligned}$$

où  $\gamma$  parcourt les chemins  $C^1$  par morceaux de  $(x_1, \dots, x_n)$  à  $(y_1, \dots, y_n)$  dans  $M^n$ .

**Proposition 1.28.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les distances induites sur  $M^n$  par  $\|-\|_2$  et  $\|-\|_{\Sigma}$  sont équivalentes.

*Démonstration.* Pour tout  $(u_1, \dots, u_n) \in TM^n$ , on a

$$\frac{1}{n} \|(u_1, \dots, u_n)\|_{\Sigma} \leq \|(u_1, \dots, u_n)\|_2 \leq \|(u_1, \dots, u_n)\|_{\Sigma},$$

les normes sont équivalentes et les distances induites aussi.  $\square$

**Lemme 1.29.** *Si  $M$  est une variété riemannienne complète et  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $K \subset M^n$  est compact si et seulement si  $K$  est fermé borné pour la distance  $d_{\Sigma}$ .*

*Démonstration.* Si  $M$  est une variété riemannienne complète, alors  $M^n$  est aussi une variété riemannienne complète, pour la norme  $\|-\|_2$ . Par le théorème de Hopf-Rinow, un ensemble  $K$  est compact si et seulement si il est fermé et borné pour la distance induite par la norme  $\|-\|_2$ , qui est équivalente à la distance  $d_{\Sigma}$ . Ce qui donne le résultat.  $\square$

## 2. DISTANCES CURVILIGNES

Fixons une variété riemannienne connexe,  $M$ . L'objet de cette section est de définir des distances sur l'ensemble  $\text{Ran}(M)$ . Ces distances seront paramétrées par des poids,  $\alpha: \mathbb{N}_{\geq 1} \rightarrow [1, +\infty[$  (définition 2.6). La distance entre deux configurations de  $M$ ,  $S$  et  $T$ , est alors donnée par l'infimum des longueurs (pondérées), des chemins entre  $S$  et  $T$  (définition 2.13).

Pour pouvoir définir la longueur de chemins dans  $\text{Ran}(M)$ , on doit se restreindre à une classe de chemin qu'on appelle  $C^1$  par morceaux. Ceux-ci sont étudiés dans la Section 2.1. On s'intéressera en particulier à des chemins admettant des relèvements locaux vers  $M^n$ . On définira ensuite la longueur des chemins  $C^1$  par morceaux et de leurs relèvements (Section 2.2), avant de définir les distances curvilignes (Section 2.3). Finalement, dans une dernière section (Section 2.4), on montre que l'on peut restreindre notre attention aux chemins dont le cardinal est décroissant puis croissant. En particulier, on montre que pour calculer la distance entre  $S$  et  $T$ , il suffit d'étudier  $\text{Ran}_{\leq n}(M)$ , où  $n = \max\{\text{card}(S), \text{card}(T)\}$  (corollaire 2.22).

**2.1. Chemins et relèvements  $C^1$  par morceaux.** Dans cette section, on définit les notions de relèvement pour des chemins dans  $\text{Ran}(M)$ , ainsi que la notion de chemin  $C^1$  par morceaux. Par chemins continus dans  $\text{Ran}(M)$ , on entend continus pour la topologie de Hausdorff, mais on obtiendrait des définitions identiques en considérant la continuité pour la topologie faible, voir la remarque 2.3.

**Définition 2.1.** Soient  $a \leq b \in \mathbb{R}$ , et  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin continu. Un relèvement de  $\gamma$  est la donnée de

- une subdivision de  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < \dots < t_k = b$ , avec  $k \geq 0$ ,
- pour tout  $0 \leq i \leq k-1$ , un chemin continu,  $\mu_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M^{n_i}$ , avec  $n_i \geq 1$ , vérifiant  $\pi_{n_i}(\mu_i(t)) = \gamma(t)$  pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ .

On note un tel relèvement  $((t_0, \dots, t_k), (\mu_0, \dots, \mu_{k-1}))$ , ou simplement  $(\mu_0, \dots, \mu_{k-1})$ . Il est dit  $C^1$  par morceaux si chaque  $\mu_i$  est une fonction  $C^1$  par morceaux.

**Définition 2.2.** Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$ . On dit que  $\gamma$  est  $C^1$  par morceaux, si il est continu et admet un relèvement  $C^1$  par morceaux.

*Remarque 2.3.* L'hypothèse de continuité pour un chemin  $C^1$  par morceaux est partiellement redondante. En effet, si  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  est une application (pas nécessairement continue), et qu'il existe un relèvement de  $\gamma$ ,  $((t_0, \dots, t_k), (\mu_0, \dots, \mu_{k-1}))$ , où chaque  $\mu_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M^{n_i}$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ , est une application continue, alors, par construction,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  est continu pour la topologie faible. En effet, pour tout  $0 \leq i \leq k-1$ , la restriction de  $\gamma$  à  $[t_i, t_{i+1}]$  est égale à  $\pi_{n_i} \circ \mu_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \text{Ran}(M)$ , qui est continu pour la topologie faible. Comme par hypothèse  $((t_0, \dots, t_k), (\mu_0, \dots, \mu_{k-1}))$  est un relèvement de  $\gamma$ , on a  $\pi_{n_i}(\mu_i(t_i)) = \pi_{n_{i-1}}(\mu_{i-1}(t_i))$ , ce qui garantit la continuité en  $t_i$ , pour  $1 \leq i \leq k-1$ .

Autrement dit, l'ensemble des chemins continus dans  $\text{Ran}(M)$ , admettant un relèvement, reste le même que l'on considère sur  $\text{Ran}(M)$  la topologie de Hausdorff ou la topologie faible. On remarque en revanche que ce n'est pas le cas si on omet la condition d'admettre un relèvement. En effet, il existe des chemins continus pour la topologie de Hausdorff dont le cardinal n'est pas borné. Ces derniers n'admettent pas de relèvements. Puisqu'on ne considérera par la suite que des chemins  $C^1$  par morceaux, on parlera simplement de chemins continus, sans spécifier la topologie sur  $\text{Ran}(M)$ .

*Remarque 2.4.* Dans toute la suite de cet article, on appellera simplement  $C^1$  par morceaux un chemin qui est à la fois continu et  $C^1$  par morceaux.

**Proposition 2.5.** *Soient  $n \geq 0$ ,  $a < b$  et  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $C^1$  par morceaux vérifiant  $\text{card}(\gamma(t)) = n$  pour tout  $t \in ]a, b[$ . Alors il existe un relèvement  $C^1$  par morceaux de  $\gamma$ ,  $\mu: [a, b] \rightarrow M^n$ . De plus, si  $\nu: [a, b] \rightarrow M^n$  est un autre relèvement de  $\gamma$ , alors il existe une permutation  $\sigma \in \Sigma_n$  telle que  $\nu = \sigma \cdot \mu$ .*

*Démonstration.* On commence par montrer l'unicité. Soient  $\mu, \nu: [a, b] \rightarrow M^n$  deux relèvements de  $\gamma$ ,  $C^1$  par morceaux. Par le lemme 1.25, il existe un relèvement continu de  $\gamma|_{]a, b[}$   $\lambda: ]a, b[ \rightarrow M^n$ . De plus, puisque  $\mu|_{]a, b[}$  et  $\nu|_{]a, b[}$  sont deux autres relèvements continus de  $\gamma|_{]a, b[}$ , il existe deux bijections  $\sigma, \tau: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  telles que

$$\mu|_{]a, b[} = \sigma \cdot \lambda \text{ et } \nu|_{]a, b[} = \tau \cdot \lambda$$

On en déduit que  $\mu|_{]a, b[} = (\sigma\tau^{-1}) \cdot \nu|_{]a, b[}$ . Par continuité de  $\mu, \nu$  et de l'action de  $\Sigma_n$  sur  $M^n$ , on en déduit que l'égalité est valable sur le segment fermé  $[a, b]$ , d'où on obtient le résultat d'unicité souhaité.

Pour l'existence, comme  $\gamma$  est un chemin  $C^1$  par morceaux, il existe un relèvement  $C^1$  par morceaux,  $((a = t_0 < \dots < t_k = b), (\mu_0, \dots, \mu_{k-1}))$ , où  $\mu_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M^{n_i}$  est un relèvement de  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ ,  $C^1$  par morceaux, pour  $0 \leq i \leq k-1$ . Construisons le relèvement souhaité sur chaque segment  $[t_i, t_{i+1}]$ . Soit  $0 \leq i \leq k-1$ . Par le lemme 1.25, il existe un relèvement continu de  $\gamma|_{]t_i, t_{i+1}[}$ ,  $\nu_i: ]t_i, t_{i+1}[ \rightarrow M^n$ , ainsi qu'une surjection  $f: \{1, \dots, n_i\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  telle que  $\mu_i|_{]t_i, t_{i+1}[} = f \cdot \nu_i$ . Comme  $\mu_i|_{]t_i, t_{i+1}[}$  est  $C^1$  par morceaux, et s'étend à  $[t_i, t_{i+1}]$  chaque composante de  $\mu_i|_{]t_i, t_{i+1}[}$  est  $C^1$  par morceaux et s'étend à  $[t_i, t_{i+1}]$ . Puisque  $f$  est surjective, il en va de même pour les composantes de  $\nu_i$ . On peut donc étendre  $\nu_i$  par continuité à l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  pour obtenir un relèvement  $C^1$  par morceaux. Par ailleurs, pour  $0 < i \leq k-1$ , on a  $\text{card}(\gamma(t_i)) = n$ , et par définition  $\pi_n(\nu_i(t_i)) = \gamma(t_i) = \pi_n(\nu_{i-1}(t_i))$ . On en déduit qu'il existe  $\sigma_i \in \Sigma_n$  tel que  $\sigma_i \cdot \nu_i(t_i) = \nu_{i-1}(t_i)$ . Finalement, quitte à remplacer

inductivement chaque  $\nu_i$  par  $\sigma_i \cdot \nu_i$ , on peut supposer que les  $\nu_i$  vérifient  $\nu_i(t_i) = \nu_{i-1}(t_i)$ , pour tout  $0 < i \leq k-1$ . Ceux-ci s'assemblent donc en un relèvement global,  $C^1$  par morceaux,  $\nu: [a, b] \rightarrow M^n$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**2.2. Longueurs des relèvements et des chemins.** Dans cette section, on définit d'abord la longueur de relèvements  $C^1$  par morceaux de chemins dans  $\text{Ran}(M)$ , puis la longueur de chemins  $C^1$  par morceaux. Ces longueurs sont des longueurs **pondérées**, au sens où elles dépendent du choix d'une fonction poids :

**Définition 2.6.** Un poids est une suite croissante  $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow [1, +\infty[$  telle que  $\alpha(1) = 1$ .

Jusqu'à la fin de la Section 3, on considérera que  $\alpha$  est un poids fixé.

**Définition 2.7.** Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$ , et  $((t_0, \dots, t_k), (\mu_0, \dots, \mu_{k-1}))$  un relèvement  $C^1$  par morceaux de  $\gamma$ . On définit la longueur du relèvement (relativement à  $\alpha$ ) par

$$\ell^\alpha(\mu_0, \dots, \mu_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha(n_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\mu'_i(t)\|_\Sigma dt$$

**Définition 2.8.** Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $C^1$  par morceaux. Sa longueur (relativement à  $\alpha$ ) est définie par

$$\ell^\alpha(\gamma) = \inf\{\ell^\alpha(\mu_0, \dots, \mu_{k-1})\}$$

où  $(\mu_0, \dots, \mu_{k-1})$  parcourt les relèvements  $C^1$  par morceaux de  $\gamma$ .

*Remarque 2.9.* On peut réécrire la formule de la définition 2.7 sous la forme :

$$\ell^\alpha(\mu_0, \dots, \mu_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \ell^\alpha(\mu_i)$$

On observe aussi que la longueur d'un relèvement est conservé par passage à une subdivision plus fine. En particulier la longueur d'une concaténation de relèvements est la somme des longueurs. De la même façon la longueur d'une concaténation de chemin est la somme des longueurs des chemins.

**Proposition 2.10.** Soient  $n \geq 0$ ,  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $C^1$  par morceaux vérifiant  $\text{card}(\gamma(t)) = n$  pour tout  $t \in ]a, b[$ . Alors, il existe un relèvement  $C^1$  par morceaux de  $\gamma$ ,  $\mu: [a, b] \rightarrow M^n$  et tout relèvement de cette forme vérifie

$$\ell^\alpha(\gamma) = \ell^\alpha(\mu).$$

*Démonstration.* L'existence d'un tel relèvement est la première partie de la Proposition 2.5. Par cette même proposition, pour toute paire de relèvement de cette forme,  $\mu, \nu: [a, b] \rightarrow M^n$  il existe  $\sigma \in \Sigma_n$  telle que  $\mu = \sigma \cdot \nu$ . Comme  $\Sigma_n$  agit par isométrie sur  $M^n$ , on en déduit que  $\ell^\alpha(\mu) = \ell^\alpha(\nu)$ . Soit maintenant  $((t_0, \dots, t_k), (\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}))$  un relèvement  $C^1$  par morceaux de  $\gamma$ . Montrons que  $\ell^\alpha(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) \geq \ell^\alpha(\mu)$ . Par la Remarque 2.9, il suffit de montrer que  $\ell^\alpha(\lambda_i) \geq \ell^\alpha(\mu_{[t_i, t_{i+1}]})$  pour tout  $0 \leq i \leq k-1$ . Fixons un  $\lambda_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M^{n_i}$ .



Une application du Lemme 1.25, et une extension par continuité donne l'existence d'une surjection  $f: \{1, \dots, n_i\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  telle que  $\lambda_i = f \cdot \mu_{[t_i, t_{i+1}]}$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \ell^\alpha(\mu_{[t_i, t_{i+1}]}) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\mu'(t)\|_\Sigma dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\mu'_j(t)\| dt \\ &\leq \sum_{l=1}^{n_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\mu'_{f(l)}(t)\| dt \\ &\leq \ell^\alpha(\lambda_i) \end{aligned}$$

Ce qui conclut cette preuve.  $\square$

La proposition précédente montre que l'on sait calculer la longueur des chemins de cardinal constant. On peut étendre ce résultat aux chemins de cardinal constant par morceaux. C'est l'objet de la définition suivante et du corollaire 2.12

**Définition 2.11.** Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin continu. On dit que  $\gamma$  est **crénelé** si

- $\gamma$  est  $C^1$  par morceaux,
- il existe une subdivision  $a = t_0 < \dots < t_k = b$ , et des entiers  $n_0, \dots, n_{k-1}$  tels que, pour tout  $0 \leq i \leq k-1$ , et pour tout  $t \in ]t_i, t_{i+1}[$ ,  $\text{card}(\gamma(t)) = n_i$ .

**Corollaire 2.12.** Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin crénelé. L'infimum dans la Définition 2.8 est réalisé.

De plus, si  $a = t_0 < \dots < t_k = b$  est une subdivision de  $[a, b]$  telle que pour tout  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  la fonction  $\text{card}(\gamma(t))$  est constante égale à  $n_i$  sur  $]t_i, t_{i+1}[$ , il existe un relèvement réalisant l'infimum, de la forme  $((t_0, \dots, t_k), (\mu_0, \dots, \mu_{k-1}))$ , où, pour tout  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ ,  $\mu_i$  est à valeurs dans  $M^{n_i}$ .

*Démonstration.* Par hypothèse, il existe  $a = t_0 < \dots < t_k = b$ , une subdivision de  $[a, b]$ , et  $(n_i)_{i \in \{1, \dots, k-1\}}$  des entiers, tels que pour tout  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , et pour tout  $t \in ]t_i, t_{i+1}[$ ,  $\text{card}(\gamma(t)) = n_i$ . Soit  $((s_0, \dots, s_l), (\mu_0, \dots, \mu_{l-1}))$  un relèvement  $C^1$  par morceaux de  $\gamma$ . Quitte à raffiner la subdivision  $a = s_0 < \dots < s_l = b$ , on peut supposer que  $\{t_0, \dots, t_k\} \subset \{s_0, \dots, s_l\}$ . En particulier, pour tout  $j \in \{0, \dots, l-1\}$ , le cardinal de  $\gamma(t)$  est constant égal à un entier  $m_j$  sur  $]s_j, s_{j+1}[$ . Par la proposition 2.10, il existe  $\nu_j: [s_j, s_{j+1}] \rightarrow M^{m_j}$  relèvement  $C^1$  par morceaux de  $\gamma_{[s_j, s_{j+1}]}$  plus court que  $\mu_j$ .

Soit  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , et soient  $j_i, j_{i+1} \in \{0, \dots, l\}$  tels que  $t_i = s_{j_i}$  et  $t_{i+1} = s_{j_{i+1}}$ . Alors,  $s_{j_i} < s_{j_i+1} < \dots < s_{j_{i+1}}$  est une subdivision de  $[t_i, t_{i+1}]$ . De plus, pour tout  $j \in \{j_i, \dots, j_{i+1}-1\}$ , on a  $\nu_j$  à valeur dans  $M^{n_i}$ . Ainsi, par le même argument que dans la preuve de la proposition 2.5, quitte à remplacer  $\nu_j$  par  $\sigma_j \cdot \nu_j$ , avec  $\sigma_j \in \Sigma_{n_i}$ , on peut supposer que les  $\nu_j$  se recollent pour donner une application  $C^1$  par morceaux  $\lambda_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M^{n_i}$ . On a donc montré qu'il existait un relèvement  $C^1$  par morceaux de

la forme recherchée vérifiant

$$\ell^\alpha((t_0, \dots, t_k), (\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1})) \leq \ell^\alpha((s_0, \dots, s_l), (\mu_0, \dots, \mu_{l-1}))$$

Il reste à montrer que celui-ci réalise l'infimum de la définition 2.8. Soit  $a = r_0 < \dots < r_l = b$  une autre subdivision de  $[a, b]$ , vérifiant  $\text{card}(\gamma(t))$  constant sur  $[r_j, r_{j+1}]$  pour tout  $j \in \{0, \dots, l-1\}$ , et  $((r_0, \dots, r_l), (\eta_0, \dots, \eta_{l-1}))$  un relèvement  $C^1$  par morceaux de  $\gamma$ , vérifiant la condition du corollaire. Quitte à passer à un raffinement commun des deux subdivisions,  $a = u_0 < \dots < u_m = b$ , on peut supposer que les deux relèvements sont subordonnés à la même subdivision. On les note  $((u_0, \dots, u_m), (\tilde{\lambda}_0, \dots, \tilde{\lambda}_{m-1}))$  et  $((u_0, \dots, u_m), (\tilde{\eta}_0, \dots, \tilde{\eta}_{m-1}))$ . Mais alors, pour tout  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  $\tilde{\lambda}_i$  et  $\tilde{\eta}_i$  sont deux relèvements  $C^1$  par morceaux de  $\gamma_{[u_i, u_{i+1}]}$ . Or, par hypothèse,  $\text{card}(\gamma(t))$  est constant, égal à un entier  $n$ , sur  $[u_i, u_{i+1}]$ . Par la proposition 2.10, et par hypothèses sur les deux relèvements, on en déduit que  $\ell^\alpha(\tilde{\lambda}_i) = \ell^\alpha(\tilde{\eta}_i)$ . Finalement, il vient:

$$\ell^\alpha(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) = \ell^\alpha(\tilde{\lambda}_0, \dots, \tilde{\lambda}_m) = \ell^\alpha(\tilde{\eta}_0, \dots, \tilde{\eta}_m) = \ell^\alpha(\eta_0, \dots, \eta_l)$$

Ce qui conclut cette preuve.  $\square$

**2.3. Distances curvilignes.** On peut maintenant définir la distance entre deux configurations. Par analogie avec une variété riemannienne, la distance entre deux configurations  $S$  et  $T$  est l'infimum de la longueur des chemins reliant ces deux configurations.

**Définition 2.13.** Soient  $S, T \in \text{Ran}(M)$ . On définit la distance curviligne (relative à  $\alpha$ ) entre  $S$  et  $T$  comme

$$d_{\text{curv}}^\alpha(S, T) = \inf\{\ell^\alpha(\gamma) \mid \gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M), \gamma(a) = S, \gamma(b) = T\}$$

où  $\gamma$  parcourt les chemins  $C^1$  par morceaux entre  $S$  et  $T$ .

Pour montrer que  $d^\alpha$  est effectivement une distance, on aura besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.14.** Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $C^1$  par morceaux, et soient  $s \in [a, b]$  et  $x \in \gamma(s)$ . Alors, il existe un chemin  $C^1$  par morceaux  $\gamma_x^s: [a, b] \rightarrow M$  vérifiant

- $\gamma_x^s(s) = x$ ,
- $\forall t \in [a, b], \gamma_x^s(t) \in \gamma(t)$ ,
- $\ell(\gamma_x^s) = \ell^\alpha(\gamma_x^s) \leq \ell^\alpha(\gamma)$ .

*Démonstration.* Soit  $((t_0, \dots, t_k), (\mu_0, \dots, \mu_{k-1}))$  un relèvement  $C^1$  par morceaux de  $\gamma$ . On suppose dans un premier temps que  $s \in [t_0, t_1]$ . Construisons, par récurrence sur  $i \in \{1, \dots, k\}$  un chemin  $\gamma_x^s: [t_0, t_i] \rightarrow M$ ,  $C^1$  par morceaux, tel que  $\gamma_x^s(s) = x$  et  $\gamma_x^s(t) \in \gamma(t)$  pour tout  $t \in [a, t_i]$ . Pour  $i = 1$ , on a  $x \in \gamma(s)$ , et  $\mu_0: [t_0, t_1] \rightarrow M^{n_0}$  vérifie  $\pi_{n_0}(\mu_0(s)) = \gamma(s)$ . Ainsi, il existe  $j \in \{1, \dots, n_0\}$  tel que  $\mu_{0,j}(s) = x$ , on définit alors  $\gamma_x^s$  sur  $[t_0, t_1]$  par

$$\begin{aligned} \gamma_x^s: [t_0, t_1] &\rightarrow M \\ t &\mapsto \mu_{0,j}(t) \end{aligned}$$

Par définition,  $\gamma_x^s(s) = x$ , et  $\gamma_x^s(t) \in \gamma(t)$  pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ , ce qui complète l'initialisation. Soit  $i \geq 1$  et supposons le chemin  $\gamma_x^s$  construit sur  $[t_0, t_i]$ . Par hypothèse,  $\gamma_x^s(t_i) \in \gamma(t_i)$ , et

$\mu_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M^{n_i}$  vérifie  $\pi_{n_i}(\mu_i(t)) = \gamma(t)$  pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . En particulier, il existe  $j \in \{1, \dots, n_i\}$  tel que  $\mu_{i,j}(t_i) = \gamma_x^s(t_i) \in \gamma(t_i)$ . On étend alors  $\gamma_x^s$  par

$$\begin{aligned} \gamma_x: [t_0, t_{i+1}] &\rightarrow M \\ t &\mapsto \begin{cases} \gamma_x^s(t) & \text{si } t \in [t_0, t_i] \\ \mu_{i,j}(t) & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}] \end{cases} \end{aligned}$$

Par construction,  $\gamma_x^s(t) \in \gamma(t)$  pour tout  $t \in [t_0, t_{i+1}]$ , et on peut donc construire par récurrence  $\gamma_x^s: [a, b] \rightarrow M$  vérifiant  $\gamma_x^s(s) = x$  et  $\gamma_x^s(t) \in \gamma(t)$  pour tout  $t \in [a, b]$ . De plus,  $\gamma_x^s$  est  $C^1$  par morceaux, par construction. Par ailleurs, l'inégalité

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|(\gamma_x^s)'(t)\| dt \leq \alpha(n_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\mu_i'(t)\|_{\Sigma} dt$$

Suit du fait que  $\alpha$  est croissante, avec  $\alpha(1) = 1$ , et que la restriction de  $(\gamma_x^s)'$  à  $[t_i, t_{i+1}]$  est une des composantes de  $\mu_i'$ . On en déduit que

$$\ell(\gamma_x^s) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|(\gamma_x^s)'(t)\| dt \leq \sum_{i=0}^{k-1} \alpha(n_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\mu_i'(t)\|_{\Sigma} dt \leq \ell^{\alpha}(\gamma)$$

La preuve pour  $s \in [t_{k-1}, t_k]$  est symétrique, et on obtient une preuve du cas général en concaténant les deux constructions. □

**Proposition 2.15.** *Soient  $S, T, U \in \text{Ran}(M)$ , on a*

- $d_{\text{curv}}^{\alpha}(S, T) = d_{\text{curv}}^{\alpha}(T, S)$
- $d_{\text{curv}}^{\alpha}(S, T) \leq d_{\text{curv}}^{\alpha}(S, U) + d_{\text{curv}}^{\alpha}(U, T)$
- $d_{\text{curv}}^{\alpha}(S, T) = 0 \Leftrightarrow S = T$

*En particulier,  $d_{\text{curv}}^{\alpha}$  est une distance sur l'ensemble  $\text{Ran}(M)$ .*

*Démonstration.* La symétrie est trivialement vérifiée. Soient  $\epsilon > 0$ , et  $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow \text{Ran}(M)$ ,  $i = 1, 2$ , deux chemins  $C^1$  par morceaux tels que  $\gamma_1(0) = S$ ,  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = U$ ,  $\gamma_2(1) = T$  et tels que  $\ell^{\alpha}(\gamma_1) \leq d_{\text{curv}}^{\alpha}(S, U) + \frac{\epsilon}{2}$  et  $\ell^{\alpha}(\gamma_2) \leq d_{\text{curv}}^{\alpha}(U, T) + \frac{\epsilon}{2}$ . Alors, la concaténation de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  fournit un chemin,  $\gamma_3: [0, 2] \rightarrow \text{Ran}(M)$ ,  $C^1$  par morceaux entre  $S$  et  $T$  et vérifiant

$$\begin{aligned} d_{\text{curv}}^{\alpha}(S, T) &\leq \ell^{\alpha}(\gamma_3) \\ &= \ell^{\alpha}(\gamma_1) + \ell^{\alpha}(\gamma_2) \\ &\leq d_{\text{curv}}^{\alpha}(S, U) + \frac{\epsilon}{2} + d_{\text{curv}}^{\alpha}(U, T) + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq d_{\text{curv}}^{\alpha}(S, U) + d_{\text{curv}}^{\alpha}(U, T) + \epsilon \end{aligned}$$

On en déduit le second point.

Pour le dernier point, supposons par symétrie qu'il existe  $x \in S$  tel que  $x \notin T$ , et soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$ , un chemin  $C^1$  par morceaux tel que  $\gamma(a) = S$  et  $\gamma(b) = T$ , et montrons que

$$d_{\text{curv}}^{\alpha}(S, T) \geq d_M(x, T)$$

Par le lemme 2.14, il existe un chemin  $C^1$  par morceaux,  $\gamma_x^a$  tel que  $\gamma_x^a(a) = x$ , et  $\gamma_x^a(t) \in \gamma(t)$  pour tout  $t \in [a, b]$ . En particulier,  $\gamma_x^a(b) \in \gamma(b) = T$ , et donc,  $\gamma_x^a$  est un chemin entre  $x$  et un point de  $T$ . Ainsi, on a

$$d_M(x, T) \leq \ell(\gamma_x^a) \leq \ell^\alpha(\gamma)$$

Comme l'inégalité est vérifiée pour tout chemin  $C^1$  par morceaux entre  $S$  et  $T$ , on en déduit que  $d_{\text{curv}}^\alpha(S, T) \geq d_M(x, T) > 0$ .  $\square$

**2.4. Distances curvilignes et strates.** La définition de la distance curviligne (définition 2.13) est relativement abstraite, et difficile à calculer pour l'instant. L'objet de cette section est de montrer la proposition 2.21 et le 2.22, qui impliquent que pour calculer la distance entre  $S$  et  $T$ , il suffit de considérer des chemins crénelés (définition 2.11), dont le cardinal est décroissant puis croissant. Par le corollaire 2.12, la longueur de tels chemins est connue, et l'hypothèse sur le cardinal garantit que l'on peut mener le calcul de la distance dans une troncation  $\text{Ran}_{\leq n}(M)$  contenant à la fois  $S$  et  $T$ .

**Proposition 2.16.** *Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $C^1$  par morceaux, de cardinal constant égal à  $n$  sur  $]a, b[$ . Si  $\text{card}(\gamma(a)), \text{card}(\gamma(b)) < n$  alors, il existe  $\mu: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$ , un chemin  $C^1$  par morceaux, vérifiant*

- $\mu(a) = \gamma(a)$  et  $\mu(b) = \gamma(b)$
- $\text{card}(\mu(t)) < n$  pour tout  $t \in [a, b]$
- $\ell^\alpha(\mu) \leq \ell^\alpha(\gamma)$ .

*Démonstration.* Par la proposition 2.10, il existe un relèvement  $C^1$  par morceaux de  $\gamma$ ,  $\lambda: [a, b] \rightarrow M^n$  tel que  $\ell^\alpha(\gamma) = \ell^\alpha(\lambda)$ . Par hypothèse, il existe  $i \neq j$  et  $i' \neq j'$  tels que  $\lambda_i(a) = \lambda_j(a) = x$ , et  $\lambda_{i'}(b) = \lambda_{j'}(b) = y$ . Par symétries du problème, on distingue trois cas :

- $i = i' = 1, j = j' = 2$ . Dans ce cas, on pose

$$\begin{aligned} \nu: [a, b] &\rightarrow M^{n-1} \\ t &\mapsto (\lambda_1(t), \lambda_3(t), \dots, \lambda_n(t)) \end{aligned}$$

et on définit  $\mu = \pi_{n-1} \circ \nu$ . Par définition,  $\mu$  est  $C^1$  par morceaux, et vérifie les hypothèses de la proposition.

- $i = 1, i' = j = 2, j' = 3$ . Dans ce cas, on pose

$$\begin{aligned} \nu: [a, b] &\rightarrow M^{n-1} \\ t &\mapsto (\lambda_1(t), \lambda_3(t), \dots, \lambda_n(t)) \end{aligned}$$

et on définit  $\mu = \pi_{n-1} \circ \nu$ . Par définition,  $\mu$  est  $C^1$  par morceaux, et vérifie les hypothèses de la proposition.

• Si  $i = 1, j = 2, i' = 3, j' = 4$ . On pose  $\epsilon = b - a$ ,  $t_1 = a + \frac{\epsilon}{3}$ ,  $t_2 = b - \frac{\epsilon}{3}$ , et  $\nu: [a, b] \rightarrow M^n$

$$t \mapsto \begin{cases} (x, x, \lambda_3(3(t-a)+a), \lambda_4(3(t-a)+a), \lambda_5(t), \dots, \lambda_n(t)) & \text{si } t \in [a, t_1[ \\ (x, x, x', x', \lambda_5(t), \dots, \lambda_n(t)) & \text{si } t \in [t_1, t_2] \\ (\lambda_1(3(t-b)+b), \lambda_2(3(t-b)+b), x', x', \lambda_5(t), \dots, \lambda_n(t)) & \text{si } t \in ]t_2, b] \end{cases}$$

et on définit  $\mu = \pi_n \circ \nu$ . Par construction,  $\mu$  vérifie les deux premières conditions. Comparons  $\ell^\alpha(\mu)$  et  $\ell^\alpha(\gamma)$ . On a d'une part :

$$\ell^\alpha(\gamma) = \ell^\alpha(\lambda) = \alpha(n) \int_a^b \|\lambda'(t)\|_\Sigma dt = \alpha(n) \sum_{i=1}^n \int_a^b \|\lambda'_i(t)\| dt.$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \ell^\alpha(\mu) &\leq \ell^\alpha(\nu) = \ell^\alpha(\nu|_{[a, t_1]}) + \ell^\alpha(\nu|_{[t_1, t_2]}) + \ell^\alpha(\nu|_{[t_2, b]}) \\ \ell^\alpha(\nu|_{[a, t_1]}) &= \alpha(n) \left( \sum_{i=3}^4 \int_a^{t_1} \|3\lambda'_i(3(t-a)+a)\| dt + \sum_{i=5}^n \int_a^{t_1} \|\lambda'_i(t)\| dt \right) \\ &= \alpha(n) \left( \sum_{i=3}^4 \int_a^{t_1} \|\lambda'_i(t)\| dt + \sum_{i=5}^n \int_a^{t_1} \|\lambda'_i(t)\| dt \right) \\ \ell^\alpha(\nu|_{[t_2, b]}) &= \alpha(n) \left( \sum_{i=1}^2 \int_{t_2}^b \|3\lambda'_i(3(t-b)+b)\| dt + \sum_{i=5}^n \int_{t_2}^b \|\lambda'_i(t)\| dt \right) \\ &= \alpha(n) \left( \sum_{i=1}^2 \int_{t_2}^b \|\lambda'_i(t)\| dt + \sum_{i=5}^n \int_{t_2}^b \|\lambda'_i(t)\| dt \right) \\ \ell^\alpha(\nu|_{[t_1, t_2]}) &= \alpha(n) \left( \sum_{i=5}^n \int_{t_1}^{t_2} \|\lambda'_i(t)\| dt \right) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \ell^\alpha(\nu) &= \ell^\alpha(\nu|_{[a, t_1]}) + \ell^\alpha(\nu|_{[t_1, t_2]}) + \ell^\alpha(\nu|_{[t_2, b]}) \\ &= \alpha(n) \left( \sum_{i=1}^n \int_a^b \|\lambda'_i(t)\| dt \right) \\ &= \ell^\alpha(\gamma) \end{aligned}$$

Et donc  $\ell^\alpha(\mu) \leq \ell^\alpha(\gamma)$ , ce qui conclut ce cas et la démonstration.  $\square$

*Exemple 2.17.* Un chemin vérifiant les conditions de la proposition précédente, et le chemin plus court et de cardinal strictement inférieur obtenus en appliquant la proposition précédente sont représentés Fig. 1 sur la ligne du milieu.

**Proposition 2.18.** *Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $C^1$  par morceaux. Il existe  $\mu: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin crénelé, vérifiant*

- $\mu(a) = \gamma(a)$  et  $\mu(b) = \gamma(b)$
- $\mu(t) \subset \gamma(t)$  pour tout  $t \in [a, b]$
- $\ell^\alpha(\mu) \leq \ell^\alpha(\gamma)$

*Démonstration.* Montrons d'abord par récurrence sur  $n \geq 1$ , que pour tout chemin  $C^1$  par morceaux  $\lambda: [a, b] \rightarrow M^n$ , il existe  $\nu: [a, b] \rightarrow M^n$ ,  $C^1$  par morceaux vérifiant

- (1)  $\nu(a) = \lambda(a)$
- (2)  $\nu(b) = \lambda(b)$
- (3)  $\pi_n(\nu(t)) \subset \pi_n(\lambda(t)), \forall t \in [a, b]$
- (4)  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $I_{i,j} = \{t \in [a, b] \mid \nu_i(t) = \nu_j(t)\}$  est une union finie, potentiellement vide, d'intervalles fermés.

Si  $n = 1$ ,  $\nu = \lambda$  convient. Soit  $n \geq 2$ , supposons la propriété montrée pour  $n - 1$  et appliquons la à  $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}): [a, b] \rightarrow M^{n-1}$  pour obtenir  $\tilde{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}): [a, b] \rightarrow M^{n-1}$ .

On va construire par récurrence sur  $i \in \{0, \dots, n - 1\}$  une suite de chemin  $C^1$  par morceaux,  $\nu_n^i: [a, b] \rightarrow M$ . On pose  $\nu_n^{(0)} = \lambda_n$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ , on suppose  $\nu_n^{i-1}$  construit et on considère l'ensemble  $\{t \in [a, b] \mid \nu_n^{(i-1)}(t) = \nu_i(t)\}$ . C'est un fermé de  $[a, b]$ , donc un compact. S'il est vide, on pose  $\nu_n^{(i)} = \nu_n^{(i-1)}$ , sinon on note  $t_i^{\min}$  et  $t_i^{\max}$  son minimum et son maximum respectivement, et on pose

$$\nu_n^{(i)}: [a, b] \rightarrow M$$

$$t \mapsto \begin{cases} \nu_n^{(i-1)}(t) & \text{si } t \in [a, t_i^{\min}] \cup [t_i^{\max}, b] \\ \nu_i(t) & \text{si } t \in [t_i^{\min}, t_i^{\max}] \end{cases}$$

Finalement, on pose  $\nu_n = \nu_n^{(n-1)}$ . Par construction, le chemin  $\nu_n$  est continu. La construction de  $\nu_n$  crée au plus  $2(n - 1)$  nouvelles discontinuités dans la dérivée, en plus du nombre fini de discontinuités provenant de  $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ , donc  $\nu_n$  est un chemin  $C^1$  par morceaux. Il vérifie  $\nu_n(a) = \lambda_n(a)$ ,  $\nu_n(b) = \lambda_n(b)$  et  $\nu_n(t) \in \pi_n(\lambda(t))$  pour tout  $t \in [a, b]$ . On pose alors  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n): [a, b] \rightarrow M^n$ . Pour conclure la récurrence, il reste à montrer que  $\nu$  vérifie le point (4).

Par l'hypothèse de récurrence, on sait que pour tout  $i \neq j \in \{1, \dots, n - 1\}$ , l'ensemble  $I_{i,j}$  est une union finie d'intervalles fermés. Il reste à montrer que  $\forall i \in \{1, \dots, n - 1\}$ ,  $I_{n,i}$  est une union finie d'intervalles fermés. On va montrer par récurrence sur  $k \in \{1, \dots, n - 1\}$  que pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $J_i^{(k)} = \{t \in [a, b] \mid \nu_n^{(k)}(t) = \nu_i(t)\}$  est une union finie d'intervalles fermés. Pour  $k = 1$ ,  $J_1^{(1)}$  est vide, ou égal à l'intervalle fermé  $[t_{\min}^1, t_{\max}^1]$ . Soient  $k \geq 2$  et  $i \leq k$ , on suppose le résultat prouvé pour  $k - 1$ . Si  $i = k$ , on a  $J_k^{(k)}$  est vide, ou égal à l'intervalle fermé  $[t_{\min}^k, t_{\max}^k]$ . Soit maintenant  $i < k$ , si  $J_i^{(k)}$  est vide, il n'y a rien à prouver. Sinon, soit  $t \in J_i^{(k)}$ , si  $t \notin [t_{\min}^k, t_{\max}^k]$ , alors  $\nu_n^{(k)}(t) = \nu_n^{(k-1)}(t) = \nu_i(t)$ , d'où  $t \in J_i^{(k-1)}$ , et réciproquement, tout  $t \in J_i^{(k-1)} \setminus [t_{\min}^k, t_{\max}^k]$  est dans  $J_i^{(k)}$ . Supposons maintenant que

$t \in [t_{\min}^k, t_{\max}^k]$ , alors  $\nu_n^{(k)}(t) = \nu_k(t) = \nu_i(t)$ , d'où  $t \in I_{i,k}$ . Ainsi, il vient

$$J_i^{(k)} = \left( J_i^{(k-1)} \cap \left( [a, t_{\min}^k] \cup [t_{\max}^k, b] \right) \right) \cup \left( I_{i,k} \cap [t_{\min}^k, t_{\max}^k] \right).$$

On en déduit que  $J_i^{(k)}$  est aussi une union finie d'intervalles fermés. Par récurrence,  $I_{n,i} = J_i^{(n-1)}$  est une union finie d'intervalles fermés, ce qui conclue la première partie de cette preuve.

Si  $\gamma$  admet un relèvement associé à une subdivision  $a = s_0 < \dots < s_l = b$ , il suffit de montrer l'énoncé pour chaque restriction  $\gamma|_{[s_i, s_{i+1}]}$ . En effet, la concaténation des chemins ainsi obtenus fournira le chemin crénelé désiré. On peut donc supposer qu'il existe un relèvement global de  $\gamma$ ,  $\lambda: [a, b] \rightarrow M^n$ ,  $C^1$  par morceaux. D'après la première partie de cette preuve, on peut construire un chemin  $\nu: [a, b] \rightarrow M^n$  vérifiant les conditions (1) à (4). On pose alors  $\mu = \pi_n \circ \nu: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$ . Par construction, ce chemin vérifie  $\mu(a) = \gamma(a)$ ,  $\mu(b) = \gamma(b)$ , et, pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $\mu(t) \subset \gamma(t)$ . Montrons que le chemin  $\mu$  est crénelé. Soit  $P = \{P_1, \dots, P_l\}$  une partition de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ . On note  $I_P \subset [a, b]$  l'ensemble défini par,  $t \in I_P$  si et seulement si

- pour tout  $k \in \{1, \dots, l\}$ , pour tout  $i, j \in P_k$ ,  $\nu_i(t) = \nu_j(t)$ ,
- pour tout  $k \neq k' \in \{1, \dots, l\}$ , pour tous  $i \in P_k$ ,  $j \in P_{k'}$ ,  $\nu_i(t) \neq \nu_j(t)$ .

Par construction, la collection des  $I_P$ , où  $P$  parcourt les partitions de  $\{1, \dots, n\}$ , forme une partition de  $[a, b]$  par des sous-ensembles disjoints deux à deux. On note par ailleurs l'égalité

$$I_P = \left( \bigcap_{k=1}^l \left( \bigcap_{i,j \in P_k} I_{i,j} \right) \right) \cap \left( \bigcap_{k \neq k'} \left( \bigcap_{i \in P_k, j \in P_{k'}} ([a, b] \setminus I_{i,j}) \right) \right).$$

Le terme apparaissant à gauche de l'intersection est une intersection finie d'union finie d'intervalles fermés, c'est donc une union finie d'intervalles fermés. D'autre part,  $[a, b] \setminus I_{i,j}$  est le complémentaire d'une union finie d'intervalles fermés, c'est donc une union finie d'intervalles ouverts (dans  $[a, b]$ ). Une intersection finie d'union finie d'intervalles ouverts est une union finie d'intervalles ouverts, ainsi  $I_P$  est l'intersection d'une union finie d'intervalles fermés avec une union finie d'intervalles ouverts. C'est donc une union finie, potentiellement vide d'intervalles qui peuvent être ouverts, fermés, ou semi-ouverts. Comme les  $I_P$  partitionnent  $[a, b]$  on obtient une collection finie d'intervalles (ouverts, fermés, ou semi-ouverts), qui partitionnent  $[a, b]$ . Ainsi, on a une subdivision  $a = t_0 < \dots < t_k = b$  telle que, pour tout  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , il existe une partition  $P$  telle que  $]t_i, t_{i+1}[ \subset I_P$ . Mais alors, pour tout  $t \in ]t_i, t_{i+1}[$ , le cardinal de  $\mu(t)$  est égal au cardinal de la partition  $P$ , par définition de  $P$ . On a donc montré que le chemin  $\mu$  était crénelé. La comparaison  $\ell^\alpha(\mu) \leq \ell^\alpha(\gamma)$  suit maintenant du Lemme 2.19.  $\square$

**Lemme 2.19.** *Soit  $\mu, \gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  deux chemins  $C^1$  par morceaux vérifiant  $\mu(t) \subset \gamma(t)$  pour tout  $t \in [a, b]$ . On suppose de plus que  $\mu$  est crénelé. Alors, on a*

$$\ell^\alpha(\mu) \leq \ell^\alpha(\gamma)$$

*Démonstration.* Comme  $\mu$  est crénelé par hypothèse, il existe une subdivision telle que le cardinal de  $\mu$  est constant sur chaque interval de celle-ci. Quitte à se restreindre à un tel interval, on peut supposer que  $\mu: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  est de cardinal constant et égal à  $n$  sur  $]a, b[$ . La Proposition 2.10 fournit alors un relèvement minimal  $\lambda: [a, b] \rightarrow M^n$ . On fixe un relèvement de  $\gamma$   $C^1$  par morceaux. De la même façon, quitte à raffiner la subdivision, on peut supposer que ce relèvement est de la forme  $\nu: [a, b] \rightarrow M^m$ . On a alors

$$\ell^\alpha(\mu) = \ell^\alpha(\lambda) = \alpha(n) \int_a^b \|\lambda'(t)\|_\Sigma dt = \alpha(n) \sum_{i=1}^n \int_a^b \|\lambda'_i(t)\| dt$$

et

$$\ell^\alpha(\gamma) \leq \ell^\alpha(\nu) = \alpha(m) \int_a^b \|\nu'(t)\|_\Sigma dt = \alpha(m) \sum_{j=1}^m \int_a^b \|\nu'_j(t)\| dt$$

Soit  $t \in [a, b]$ , et soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pour  $j \in \{1, \dots, m\}$ , on note  $E_j = \{s \in [a, b] \mid \nu_j(s) = \lambda_i(s)\}$ . Par hypothèse, on a  $\cup_j E_j = [a, b]$ . En particulier il existe  $j_i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $t$  est un point d'accumulation de  $E_{j_i}$ . On peut donc trouver une suite  $s_n \in [a, b] \setminus \{t\}$ , tendant vers  $t$ , telle que  $\lambda_i(s_n) = \nu_{j_i}(s_n)$  pour tout  $n \geq 0$ . La continuité de  $\lambda_i$  et  $\nu_{j_i}$  garantit que  $\lambda_i(t) = \nu_{j_i}(t)$ . Si  $\nu_{j_i}$  est dérivable en  $t$ , montrons que  $\lambda_i$  l'est aussi. Comme  $M$  est une variété différentielle, il existe un  $\epsilon > 0$ , et un ouvert de carte  $U_{j_i} \subset M$ , tel que  $\nu_{j_i}(s) \in U_{j_i}$ , pour tout  $s \in [t - \epsilon, t + \epsilon]$ . Notons  $\phi: U_{j_i} \rightarrow \mathbb{R}^q$  le difféomorphisme de carte. On calcule

$$d\phi(\nu'_{j_i}(t)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi(\nu_{j_i}(s_n)) - \phi(\nu_{j_i}(t))}{s_n - t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi(\lambda_i(s_n)) - \phi(\lambda_i(t))}{s_n - t} = \xi$$

Ainsi,  $\lambda_i$  est dérivable en  $t$ , de dérivée  $\lambda'_i(t) = d\phi^{-1}(\xi) = \nu'_{j_i}(t)$ . En particulier, pour presque tout  $t \in ]a, b[$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $j_i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\lambda_i(t) = \nu_{j_i}(t)$  et  $\lambda'_i(t) = \nu'_{j_i}(t)$ . Comme de plus  $\mu$  est de cardinal constant égal à  $n$  sur  $]a, b[$ , on a  $j_i \neq j_{i'}$  dès que  $i \neq i'$ . Finalement, on a pour presque tout  $t \in [a, b]$

$$\|\lambda'(t)\|_\Sigma = \sum_{i=1}^n \|\lambda'_i(t)\| = \sum_{i=1}^n \|\nu'_{j_i}(t)\| \leq \sum_{j=1}^m \|\nu'_j(t)\| = \|\nu'(t)\|_\Sigma$$

D'où on déduit:

$$\ell^\alpha(\mu) = \ell^\alpha(\lambda) = \alpha(n) \int_a^b \|\lambda'(t)\|_\Sigma dt \leq \alpha(m) \int_a^b \|\nu'(t)\|_\Sigma dt = \ell^\alpha(\nu)$$

Et, puisque l'inégalité est valable pour tout relèvement de  $\gamma$ , on a bien  $\ell^\alpha(\mu) \leq \ell^\alpha(\gamma)$ .  $\square$

**Lemme 2.20.** *Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $C^1$  par morceaux. Soient  $n_a = \text{card}(\gamma(a))$ ,  $n_b = \text{card}(\gamma(b))$  et  $n = \max(n_a, n_b)$ . Il existe un chemin crénelé  $\mu: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  tel que*

- $\mu(a) = \gamma(a)$ ,  $\mu(b) = \gamma(b)$ ,
- $\text{card}(\mu(t)) \leq n$  pour tout  $t \in [a, b]$ ,
- $\ell^\alpha(\mu) \leq \ell^\alpha(\gamma)$ .



*Démonstration.* Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $C^1$  par morceaux. On note  $n_a = \text{card}(\gamma(a))$ ,  $n_b = \text{card}(\gamma(b))$  et  $n = \max(n_a, n_b)$ . Par la proposition 2.18, il existe un chemin crénelé  $\nu$  vérifiant  $\nu(a) = \gamma(a)$ ,  $\nu(b) = \gamma(b)$ , et  $\ell^\alpha(\nu) \leq \ell^\alpha(\gamma)$ . Soit  $k \geq 0$  tel que  $n + k = \max\{\text{card}(\nu(t)) \mid t \in [a, b]\}$ . On va raisonner par récurrence sur  $k$ . Si  $k = 0$ ,  $\mu = \nu$  est de la forme recherchée. Supposons  $k \geq 1$ , et montrons qu'on peut se ramener à un chemin crénelé plus court, de cardinal majorée par  $n + k - 1$ . Comme la composition  $\text{card} \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$  est continue,  $U_{n+k} = \{t \in [a, b] \mid \text{card}(\nu(t)) = n + k\}$  est un ouvert de  $[a, b]$ . Comme  $\nu$  est crénelé, c'est une union finie d'intervalles ouverts disjoints.  $]a_i, b_i[$ ,  $i \in \{1, \dots, l\}$ . On note que  $\text{card}(\nu(a_i)), \text{card}(\nu(b_i)) < n + k$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, l\}$ , par construction. On peut donc appliquer la Proposition 2.16 aux restrictions  $\nu|_{]a_i, b_i]}$  pour obtenir un chemin plus court dont le cardinal est majoré par  $n + k - 1$ . Puis, en appliquant la Proposition 2.18 à ce nouveau chemin, on obtient un chemin crénelé, encore plus court, de cardinal majoré par  $n + k - 1$ . Ainsi, par récurrence sur  $k$ , on obtient un chemin crénelé,  $\mu: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$ , vérifiant

- $\text{card}(\mu(t)) \leq n$  pour tout  $t \in [a, b]$ ,
- $\mu(a) = \gamma(a), \mu(b) = \gamma(b)$ ,
- $\ell^\alpha(\mu) \leq \ell^\alpha(\gamma)$

□

**Proposition 2.21.** *Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $C^1$  par morceaux, il existe  $\mu: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin crénelé, et  $c \leq d \in [a, b]$  tels que*

- $\mu(a) = \gamma(a), \mu(b) = \gamma(b)$
- $\text{card}(\mu(t))$  est décroissant sur  $[a, c]$
- $\text{card}(\mu(t))$  est minimal sur  $[c, d]$ , i.e.  $\text{card}(\mu(t)) = \min\{\text{card}(\mu(s))\} \Leftrightarrow t \in [c, d]$ ,
- $\text{card}(\mu(t))$  est croissant sur  $[d, b]$ ,
- $\ell^\alpha(\mu) \leq \ell^\alpha(\gamma)$ .

*Démonstration.* Soient  $n_a = \text{card}(\gamma(a))$ ,  $n_b = \text{card}(\gamma(b))$ , et  $n = \max(n_a, n_b)$ . On va raisonner par récurrence sur  $n$ . Par le Lemme 2.20, il existe un chemin crénelé,  $\nu: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$ , vérifiant

- $\text{card}(\nu(t)) \leq n$  pour tout  $t \in [a, b]$ ,
- $\nu(a) = \gamma(a), \nu(b) = \gamma(b)$ ,
- $\ell^\alpha(\nu) \leq \ell^\alpha(\gamma)$

Si  $n = 1$ , on a nécessairement  $\text{card}(\nu(t)) = 1$  pour tout  $t \in [a, b]$ , et  $\mu = \nu$  est le chemin recherché, avec  $c = a$  et  $d = b$ . Supposons maintenant  $n \geq 2$ , et le résultat prouvé pour tous  $k < n$ . Par symétrie de la situation, on peut supposer que  $n = n_a \geq n_b$ . On distingue alors deux cas

- si  $n = n_a > n_b$ , comme  $\text{card}(\nu(t)) \leq n$  pour tout  $t \in [a, b]$ , l'ensemble  $U_n = \{t \in [a, b] \mid \text{card}(\nu(t)) = n\}$  est un ouvert de  $[a, b]$  qui contient  $a$ . De plus, comme  $\nu$  est crénelé,  $U_n$  est une union disjointe finie d'intervalles ouverts dans  $[a, b]$ . Un de ces intervalles est de la forme  $[a, c_n[$ , avec  $c_n \in ]a, b]$ . En particulier, on a  $\text{card}(\nu(t)) = n$  pour tout  $t < c_n$ , et  $\text{card}(\nu(c_n)) < n$ . On note alors  $n_c = \text{card}(\nu(c_n))$ . Si  $n_c = n_b$ , et  $\text{card}(\nu(t)) = n_c$ , pour tout  $t \in [c_n, b]$ , alors  $\mu = \nu$  est de la forme recherchée,

avec  $c = c_n$ , et  $d = b$ . Sinon, on pose  $n' = \max(n_c, n_b)$ . Mais alors, la restriction  $\nu|_{[c_n, b]}: [c_n, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$ , vérifie  $\text{card}(\nu(c_n)) < n$  et  $\text{card}(\nu(b)) < n$ , on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir  $c \leq d \in [c_n, b]$ , et  $\lambda: [c_n, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  vérifiant

- $\lambda(c_n) = \nu(c_n)$  et  $\lambda(b) = \nu(b) = \gamma(b)$ ,
- $\text{card}(\lambda(t))$  décroissant sur  $[c_n, c]$ ,
- $\text{card}(\lambda(t))$  minimal sur  $[c, d]$ ,
- $\text{card}(\lambda(t))$  croissant sur  $[d, b]$ ,
- $\ell^\alpha(\lambda) \leq \ell^\alpha(\nu|_{[c_n, b]})$ .

On définit alors  $\mu$  comme suit

$$\begin{aligned} \mu: [a, b] &\rightarrow \text{Ran}(M) \\ t &\mapsto \begin{cases} \nu(t) & \text{si } t \in [a, c_n] \\ \lambda(t) & \text{si } t \in [c_n, b] \end{cases} \end{aligned}$$

Par construction,  $\mu$  est la concaténation de deux chemins  $C^1$  par morceaux, et est donc  $C^1$  par morceaux. De plus, par construction,  $\text{card}(\mu(t))$  est décroissant sur  $[a, c_n]$ , et sur  $[c_n, c]$ , donc  $\text{card}(\mu(t))$  est décroissant sur  $[a, c]$ , et  $\text{card}(\mu(t)) = \text{card}(\lambda(t))$  est minimal sur  $[c, b]$  et finalement  $\text{card}(\mu(t)) = \text{card}(\lambda(t))$  est croissant sur  $[d, b]$ . Par ailleurs,  $\mu$  coïncide avec  $\gamma$  en  $a$  et  $b$ , et on a

$$\begin{aligned} \ell^\alpha(\mu) &= \ell^\alpha(\nu|_{[a, c_n]}) + \ell^\alpha(\lambda) \\ &\leq \ell^\alpha(\nu|_{[a, c_n]}) + \ell^\alpha(\nu|_{[c_n, b]}) \\ &= \ell^\alpha(\nu) \\ &\leq \ell^\alpha(\gamma) \end{aligned}$$

Le chemin  $\mu$  est donc de la forme recherchée, ce qui conclue ce cas.

- Si  $n = n_a = n_b$ . Si pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $\text{card}(\nu(t)) = n$  alors  $\mu = \nu$  est de la forme recherchée, avec  $c = a$  et  $d = b$ . Sinon, l'ensemble  $U_n = \{t \in [a, b] \mid \text{card}(\nu(t)) = n\}$  est un ouvert, non connexe de  $[a, b]$ , contenant  $a$  et  $b$ . Comme  $\nu$  est crénelé, c'est une union disjointe finie d'intervalles ouverts de  $[a, b]$ . Deux de ces ouverts doivent être de la forme  $[a, c_n[$ ,  $]d_n, b]$ , avec  $c_n \leq d_n \in [a, b]$ . On a alors  $\text{card}(\nu(t)) = n$  si  $t < c_n$  ou  $t > d_n$ , et  $\text{card}(\nu(c_n)), \text{card}(\nu(d_n)) < n$ . Notons  $n_c = \text{card}(\nu(c_n))$  et  $n_d = \text{card}(\nu(d_n))$ . Si pour tout  $t \in [c_n, d_n]$ ,  $\text{card}(\nu(t)) = n_c$ , alors  $\mu = \nu$  est de la forme recherché, avec  $c = c_n$ ,  $d = d_n$ . Sinon, on a  $\max(n_c, n_d) < n$ , par construction, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\nu|_{[c_n, d_n]}$  pour obtenir un chemin  $\lambda: [c_n, d_n] \rightarrow \text{Ran}(M)$ , et  $c \leq d \in [c_n, d_n]$ , tels que
  - $\lambda(c_n) = \nu(c_n)$  et  $\lambda(d_n) = \nu(d_n)$ ,
  - $\text{card}(\lambda(t))$  décroissant sur  $[c_n, c]$
  - $\text{card}(\lambda(t))$  minimal sur  $[c, d]$ ,
  - $\text{card}(\lambda(t))$  croissant sur  $[d, d_n]$ ,
  - $\ell^\alpha(\lambda) \leq \ell^\alpha(\nu)$ .

On définit alors  $\mu$  comme suit.

$$\begin{aligned} \mu: [a, b] &\rightarrow \text{Ran}(M) \\ t &\mapsto \begin{cases} \nu(t) & \text{si } t \in [a, c_n] \\ \lambda(t) & \text{si } t \in [c_n, d_n] \\ \nu(t) & \text{si } t \in [d_n, b] \end{cases} \end{aligned}$$

Le chemin  $\mu$  est la concaténation de 3 chemins  $C^1$  par morceaux, il est donc  $C^1$  par morceaux. De plus,  $\mu$  coïncide avec  $\gamma$  en  $a$  et  $b$  par construction, et  $\text{card}(\mu(t))$  est décroissant sur  $[a, c_n] \cup [c_n, c] = [a, c]$ , minimal sur  $[c, d]$  et croissant sur  $[c, c_n] \cup [c_n, b]$ . Finalement, on a

$$\begin{aligned} \ell^\alpha(\mu) &= \ell^\alpha(\nu|_{[a, c_n]}) + \ell^\alpha(\lambda) + \ell^\alpha(\nu|_{[d_n, b]}) \\ &\leq \ell^\alpha(\nu|_{[a, c_n]}) + \ell^\alpha(\nu|_{[c_n, d_n]}) + \ell^\alpha(\nu|_{[d_n, b]}) \\ &= \ell^\alpha(\nu) \\ &\leq \ell^\alpha(\gamma) \end{aligned}$$

Le chemin  $\mu$  vérifie donc les propriétés recherchées, ce qui conclut ce cas, la récurrence, et la preuve. □

**Corollaire 2.22.** *Soient  $S, T \in \text{Ran}(M)$ , deux configurations et  $\alpha$  un poids, l'infimum dans la définition 2.13 peut être calculé sur les chemins crénelés, de cardinal décroissant puis croissant. En particulier,  $d_{\text{curv}}^\alpha(S, T)$  ne dépend que des  $n$  premiers termes de la suite  $\alpha$ , où  $n = \max\{\text{card}(S), \text{card}(T)\}$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 2.21, pour tout chemin  $C^1$  par morceaux entre  $S$  et  $T$ , il existe un chemin crénelé, de cardinal décroissant puis croissant, de plus faible longueur relativement à  $\alpha$ . Comme ces derniers sont aussi des chemins  $C^1$  par morceaux, ces deux infimum coïncident. Par ailleurs, la longueur d'un chemin crénelé entre  $S$  et  $T$ , de cardinal décroissant puis croissant, ne fait apparaître que les  $n$  premiers termes de la suite  $\alpha$ , où  $n = \max\{\text{card}(S), \text{card}(T)\}$  □

### 3. DISTANCES ET COMBINATOIRE

Dans la section précédente, pour chaque poids  $\alpha$ , on a construit une distance  $d_{\text{curv}}^\alpha$  sur l'espace  $\text{Ran}(M)$ , en considérant des longueurs de chemins dans  $\text{Ran}(M)$ . L'objet de cette section est de définir une autre distance,  $d_{\text{comb}}^\alpha$ , purement combinatoire, à partir de la distance  $d_M$  sur  $M$ . On va montrer que, si  $M$  est une variété riemannienne complète et connexe, ces deux définitions coïncident, i.e.  $d_{\text{curv}}^\alpha = d_{\text{comb}}^\alpha$  (théorème 3.10), et on notera alors simplement  $d^\alpha$  la distance. On en déduira que pour toute paire de configurations  $S, T \in \text{Ran}(M)$ , il existe un chemin  $C^1$  par morceaux entre  $S$  et  $T$ ,  $\gamma$ , qui réalise la distance, i.e. qui vérifie  $\ell^\alpha(\gamma) = d^\alpha(S, T)$ .

La section est organisée comme suit. Dans la Section 3.1, on définit la distance combinatoire entre deux configurations, en termes de chaînes combinatoires, et on montre qu'il

s'agit bien d'une distance. A partir de la Section 3.2, on supposera que la variété riemannienne  $M$  est complète et connexe. Sous ces hypothèses, on donne des correspondances entre chemins  $C^1$  par morceaux et chaînes combinatoires (propositions 3.7 et 3.9). Dans la Section 3.3, on montre l'égalité  $d_{\text{comb}}^\alpha = d_{\text{curv}}^\alpha$  (théorème 3.10). Puis, on montre que l'on peut calculer la distance combinatoire en se restreignant à des relations particulières, les fusions et les bijections, dans la Section 3.4. Finalement, on montre dans les Sections 3.5 et 3.6 que les distances combinatoires et curvilignes sont toutes les deux réalisées (théorèmes 3.19 et 3.25).

**3.1. Distances combinatoires.** On commence par définir les notions nécessaires à la définition de la distance combinatoire : les **relations surjectives** entre deux configurations de  $\text{Ran}(M)$ , et les **chaînes combinatoires**. Bien qu'elles soient définies en termes purement combinatoires, on verra dans la section suivante que, lorsque  $M$  est une variété riemannienne complète et connexe, on a une correspondance naturelle entre ces notions combinatoires et certains chemins sur  $\text{Ran}(M)$ . On définit ensuite une notion de longueur combinatoire pour les relations surjectives et sur les chaînes combinatoires (définition 3.3). Enfin, par analogie avec la distance curviligne, la distance combinatoire est définie comme l'infimum des longueurs des chaînes de combinatoires entre deux configurations (définition 3.4).

**Définition 3.1.** Soient  $S, T \in \text{Ran}(M)$  et  $R \subset S \times T$  une relation. On dit que la relation  $R$  est **surjective** si

- pour tout  $x \in S$ , il existe  $y \in T$  tel que  $xRy$
- pour tout  $y \in T$ , il existe  $x \in S$  tel que  $xRy$ .

On appellera **cardinal** de la relation  $R$  le cardinal,  $\text{card}(R)$ , de l'ensemble  $R \subset S \times T$ . On notera  $R^{\text{op}} \subset T \times S$  la relation définie par  $yR^{\text{op}}x \Leftrightarrow xRy$ .

**Définition 3.2.** Une **chaîne combinatoire** entre  $S$  et  $T$  est la donnée de

- une suite de configurations  $S = S_0, \dots, S_k = T$ ,
- une suite de relations surjective  $R_i \subset S_i \times S_{i+1}$ , pour tout  $0 \leq i \leq k-1$ .

On notera les chaînes combinatoires  $((S_0, \dots, S_k), (R_0, \dots, R_{k-1}))$  ou seulement  $(R_0, \dots, R_{k-1})$  selon le contexte.

**Définition 3.3.** Soit  $\alpha$  un poids. La longueur combinatoire d'une relation  $R \subset S \times T$  est donnée par

$$\ell_{\text{comb}}^\alpha(R) = \alpha(\text{card}(R)) \sum_{xRy} d_M(x, y).$$

La longueur d'une chaîne combinatoire  $(R_0, \dots, R_{k-1})$  est donnée par

$$\ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i).$$

**Définition 3.4.** Soient  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations, et  $\alpha$  un poids. La distance combinatoire entre  $S$  et  $T$  (relativement à  $\alpha$ ) est donnée par l'infimum suivant.

$$d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) = \inf\{\ell_{\text{comb}}^\alpha((S_0, \dots, S_k), (R_0, \dots, R_{k-1})) \mid S_0 = S, S_k = T\}$$

où  $((S_0, \dots, S_k), (R_0, \dots, R_{k-1}))$  parcourt les chaînes combinatoires entre  $S$  et  $T$ .

**Proposition 3.5.** *Soit  $\alpha$  un poids. La distance combinatoire relative à  $\alpha$  est une distance sur  $\text{Ran}(M)$ .*

*Démonstration.* On obtient la symétrie en prenant les relations opposées dans une chaîne combinatoire. L'inégalité triangulaire provient de la concaténation de chaînes combinatoires. Finalement, soient  $S$  et  $T$  deux configurations. Si  $S = T$ , alors la relation  $\text{Id}_S \subset S \times S$  fournit une chaîne combinatoire de longueur nulle entre  $S$  et  $S$ , montrant que  $d_{\text{curv}}^\alpha(S, S) = 0$ . Sinon, par symétrie, on peut supposer qu'il existe  $x \in S$  tel que  $x \notin T$ . Soit  $((S_0, \dots, S_k), (R_0, \dots, R_{k-1}))$  une chaîne combinatoire entre  $S$  et  $T$ . Comme chacune des  $R_i$  est surjective, on peut construire une suite  $x = x_0, \dots, x_k$  telle que  $x_i \in S_i$  et  $x_j R_j x_{j+1}$  pour tout  $0 \leq i \leq k$  et  $0 \leq j \leq k-1$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) &= \sum_{i=0}^{k-1} \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i) \\ &\geq \sum_{i=0}^{k-1} d_M(x_i, x_{i+1}) \\ &\geq d_M(x_0, x_k) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse,  $x = x_0 \notin T$  et  $x_k \in T$ . D'où on déduit  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) \geq d_M(x, T) > 0$ . Comme cette inégalité est valable pour toute chaîne de fusion, on a bien  $d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) \geq d_M(x, T) > 0$ , ce qui conclut cette preuve.  $\square$

**3.2. Chemins géodésiques et relations.** A partir de maintenant, et jusqu'à la fin de cette section, on suppose que  $M$  est une variété riemannienne complète et connexe. En particulier, on utilisera le fait que pour tout  $x, y \in M$ , il existe un chemin géodésique dans  $M$ ,  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ ,  $C^1$  par morceaux, tel que  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$ , et  $\ell(\gamma) = d_M(x, y)$ . En utilisant cette observation, on peut associer à chaque relation  $R \subset S \times T$ , un chemin  $C^1$  par morceaux entre  $S$  et  $T$ , de longueur connue.

**Définition 3.6.** Soient  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations, et  $R \subset S \times T$  une relation entre  $S$  et  $T$ . On appelle chemin direct associé à  $R$  tout chemin  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  admettant un relèvement de la forme  $(\mu_1, \dots, \mu_n): [a, b] \rightarrow M^n$ , avec

- $n = \text{card}(R)$ ,
- pour tout  $1 \leq i \leq n$ , il existe  $xRy$  tels que  $\mu_i: [a, b] \rightarrow M$  est une géodésique minimale entre  $x$  et  $y$ .
- pour tout  $(x, y) \in S \times T$  tel que  $xRy$ , il existe  $1 \leq i \leq n$  tel que  $\mu_i: [a, b] \rightarrow M$  est une géodésique minimale entre  $x$  et  $y$ .

**Proposition 3.7.** *Soient  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations, et  $R \subset S \times T$  une relation, il existe un chemin direct entre  $S$  et  $T$ ,  $\vec{R}$  associé à  $R$ . Ce dernier vérifie*

$$\ell^\alpha(\vec{R}) \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R).$$

*Démonstration.* On fixe une bijection entre  $R$  et  $\{1, \dots, n\}$ , avec  $n = \text{card}(R)$ . Puis, pour la  $i$ -ème paire  $(x_i, y_i) \in R$  on choisit une géodésique minimale  $\mu_i: [0, 1] \rightarrow M$  entre  $x_i$  et  $y_i$ . On pose  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \rightarrow M^n$ . Le chemin  $\gamma = \pi_n(\mu)$  est  $C^1$  par morceaux, par construction, et est un chemin direct associé à  $R$ . De plus, par définition de la longueur curviligne,  $\vec{R}$  est plus court que sont relèvement  $\mu$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \ell^\alpha(\vec{R}) &\leq \ell^\alpha(\mu) \\ &\leq \alpha(n) \sum_{i=1}^n \ell(\mu_i) \\ &\leq \alpha(n) \sum_{i=1}^n d_M(x_i, y_i) \\ &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R) \end{aligned}$$

□

**Définition 3.8.** Soit  $\mu: [a, b] \rightarrow M^n$  un relèvement  $C^1$  par morceaux d'un chemin  $\gamma: [a, b] \rightarrow M^n$ . On appelle relation induite par  $\mu$ , et on note  $R_\mu \subset \gamma(0) \times \gamma(1)$  la relation définie par

$$xR_\mu y \Leftrightarrow \exists i, \mu_i(0) = x, \mu_i(1) = y$$

**Proposition 3.9.** Soient  $n \geq 1$ , et  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $C^1$  par morceaux tel que  $\text{card}(\gamma(t)) = n$  pour tout  $t \in ]a, b[$ . Alors, il existe une relation  $R_\gamma \subset \gamma(a) \times \gamma(b)$ , de cardinal  $n$ , telle que pour tout relèvement de  $\gamma$  de cardinal  $n$ ,  $\mu: [a, b] \rightarrow M^n$ ,  $R_\gamma = R_\mu$ . De plus,

$$\ell^\alpha(\gamma) \geq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_\gamma).$$

*Démonstration.* Par la proposition 2.10, il existe un relèvement  $C^1$  par morceaux de  $\gamma$ ,  $\mu: [a, b] \rightarrow M^n$  tel que  $\ell^\alpha(\gamma) = \ell^\alpha(\mu)$ . On pose  $R_\gamma = R_\mu$ . Cette relation est de cardinal  $n$ , par définition. De plus, pour tout autre relèvement de  $\gamma$  de cardinal  $n$ ,  $\nu: [a, b] \rightarrow M^n$ , il existe  $\sigma \in \Sigma_n$  tel que  $\nu = \sigma \cdot \mu$ . En particulier,  $R_\nu = R_\mu$ . Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \ell^\alpha(\gamma) &= \ell^\alpha(\mu) = \alpha(n) \int_a^b \|\mu'(t)\|_\Sigma dt \\ &= \alpha(n) \int_a^b \sum_{i=1}^n \|\mu'_i(t)\| dt \\ &= \alpha(n) \sum_{i=1}^n \int_a^b \|\mu'_i(t)\| dt \\ &\geq \alpha(n) \sum_{i=1}^n d_M(\mu_i(a), \mu_i(b)) \\ &\geq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_\mu) = \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_\gamma) \end{aligned}$$

□

**3.3. Comparaison des distances.** Les constructions de la section précédente permettent maintenant de comparer les deux distances  $d_{\text{curv}}^\alpha$  et  $d_{\text{comb}}^\alpha$ .

**Théorème 3.10.** *Soient  $\alpha$  un poids, et  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations. On a l'égalité*

$$d_{\text{curv}}^\alpha(S, T) = d_{\text{comb}}^\alpha(S, T)$$

*Démonstration.* Commençons par montrer que  $d_{\text{curv}}^\alpha(S, T) \geq d_{\text{comb}}^\alpha(S, T)$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Par le corollaire 2.22, il existe un chemin crénelé, de cardinal décroissant puis croissant,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$ , tel que  $\ell^\alpha(\gamma) \leq d_{\text{curv}}^\alpha(S, T) + \epsilon$ . Notons  $(t_0, \dots, t_k)$  une subdivision de  $[a, b]$  telle que  $\text{card}(\gamma(t))$  est constant sur  $]t_i, t_{i+1}[$ , pour  $0 \leq i \leq k-1$ . Par définition, on a

$$\ell^\alpha(\gamma) = \sum_{i=0}^{k-1} \ell^\alpha(\gamma|_{]t_i, t_{i+1}[})$$

De plus, par la proposition 3.9, pour tout  $0 \leq i \leq k-1$ , il existe une relation  $R_i \subset \gamma(t_i) \times \gamma(t_{i+1})$  telle que  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i) \leq \ell^\alpha(\gamma|_{]t_i, t_{i+1}[})$ . Finalement, il vient

$$\begin{aligned} d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \ell^\alpha(\gamma|_{]t_i, t_{i+1}[}) \\ &\leq \ell^\alpha(\gamma) \\ &\leq d_{\text{curv}}^\alpha(S, T) + \epsilon \end{aligned}$$

Comme l'inégalité est valable pour tout  $\epsilon > 0$ , on en déduit que  $d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) \leq d_{\text{curv}}^\alpha(S, T)$ .

Dans l'autre direction, soient  $\epsilon > 0$ , et  $((S_0, \dots, S_k), (R_0, \dots, R_{k-1}))$  une chaîne combinatoire entre  $S$  et  $T$  telle que  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) \leq d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) + \epsilon$ . Par la proposition 3.7, pour tout  $0 \leq i \leq k-1$ , il existe un chemin  $C^1$  par morceaux,  $\vec{R}_i$  entre  $S_i$  et  $S_{i+1}$  vérifiant  $\ell^\alpha(\vec{R}_i) \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i)$ . On définit alors  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \text{Ran}(M)$  comme une reparamétrisation de la concaténation des  $R_i$ , et il vient

$$\begin{aligned} d_{\text{curv}}^\alpha(S, T) &\leq \ell^\alpha(\gamma) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \ell^\alpha(\vec{R}_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i) \\ &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) \\ &\leq d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) + \epsilon. \end{aligned}$$

L'inégalité étant valable pour tout  $\epsilon > 0$ , on en déduit que  $d_{\text{curv}}^\alpha(S, T) \leq d_{\text{comb}}^\alpha(S, T)$ .  $\square$

L'égalité  $d_{\text{comb}}^\alpha = d_{\text{curv}}^\alpha$  permet de déduire le résultat suivant sur le calcul de  $d_{\text{comb}}^\alpha$ .

**Corollaire 3.11.** *Soient  $\alpha$  un poids, et  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations. On a*

$$d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) = \inf\{\ell_{\text{comb}}^\alpha((S_0, \dots, S_k), (R_0, \dots, R_{k-1})) \mid S_0 = S, S_k = T\}$$

où l'infimum est calculé sur les chaînes combinatoires,  $((S_0, \dots, S_k), (R_0, \dots, R_{k-1}))$  telles que il existe  $0 \leq l \leq k-1$  vérifiant

- $\text{card}(S_i) = \text{card}(R_i) \geq \text{card}(S_{i+1})$ , pour  $0 \leq i \leq l-1$
- $\text{card}(S_{i+1}) = \text{card}(R_i) \geq \text{card}(S_i)$  pour  $l+1 \leq i \leq k-1$ ,
- $\text{card}(S_l) = \text{card}(R_l) = \text{card}(S_{l+1})$ .

En particulier, on peut supposer que

$$\text{card}(S_i) \leq \max\{\text{card}(S), \text{card}(T)\}, \quad \forall 0 \leq i \leq k.$$

*Démonstration.* Par le théorème 3.10, ainsi que le corollaire 2.22, l'infimum peut être calculé sur les chemins  $C^1$  par morceaux crénelés, de cardinal décroissant puis croissant. Soit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un tel chemin,  $a = t_0 < \dots < t_k = b$  une subdivision telle que pour tout  $0 \leq i \leq k-1$ , et pour tout  $t \in ]t_i, t_{i+1}[$ ,  $\text{card} \gamma(t) = n_i$ . Notons  $l$ , l'entier compris entre 0 et  $k-1$  tel que  $\text{card}(\gamma(t_l)) = \text{card}(\gamma(t_{l+1}))$ . En appliquant la proposition 3.9, à chaque tronçon  $\gamma|_{]t_i, t_{i+1}[}$ , on obtient une chaîne combinatoire entre  $S$  et  $T$ , plus courte que le chemin  $\gamma$ , et dont les cardinaux vérifient la propriété voulue.  $\square$

**3.4. Fusions et bijections.** Le calcul de  $d_{\text{comb}}^\alpha(S, T)$  nécessite le calcul d'un infimum sur un ensemble de chaînes combinatoires relativement grand, et difficile à appréhender. L'objet de cette section est de montrer que l'on peut se restreindre aux chaînes combinatoires composées de relations élémentaires de deux types seulement : les fusions (et leurs opposées), qui identifient plusieurs points d'une configurations, et les bijections entre deux configurations de même cardinaux (proposition 3.15).

**Définition 3.12.** Soient  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations, et  $R \subset S \times T$  une relation. On dit que

- $R$  est une **fusion** (de  $S$  vers  $T$ ), si  $R$  est le graphe d'une fonction surjective  $f: S \rightarrow T$ , telle que
  - il existe  $x_0 \in T$  tel que  $\text{card}(f^{-1}(x_0)) \geq 2$
  - pour tout  $x \neq x_0 \in T$ ,  $f^{-1}(x) = \{x\} \subset S$ .

Si de plus,  $\text{card}(f^{-1}(x_0)) = 2$ , on dit que la fusion est **simple**.

- $R$  est une **bijection**, si  $R$  est le graphe d'une bijection  $\phi: S \rightarrow T$ .
- $R$  est une **anti-fusion**, si la relation opposée,  $R^{\text{op}} \subset T \times S$ , est une fusion de  $T$  vers  $S$ . Elle est **simple** si la fusion associée est simple.

*Remarque 3.13.* Dans la suite, on identifiera une fusion de  $S$  vers  $T$  - c'est à dire une relation  $R \subset S \times T$  - avec la fonction surjective  $f: S \rightarrow T$  dont  $R$  est le graphe. On dira alors que  $f$  est une fusion, et on notera  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(f)$  pour la longueur de la fusion.

**Définition 3.14.** Une chaîne de Fusions - Bijections - Antifusions (FBA) est une chaîne combinatoire  $(R_0, \dots, R_{k-1})$  telle qu'il existe  $0 \leq l < k-1$  vérifiant



- $R_i$  est une fusion, pour  $0 \leq i \leq l$ ,
- $R_l$  est une bijection,
- $R_i$  est une anti-fusion, pour  $l + 1 \leq i \leq k - 1$ .

Une telle chaîne est dite **simple** si toutes les fusions et anti-fusions sont simples.

**Proposition 3.15.** *Soient  $\alpha$  un poids,  $S, T \subset \text{Ran}(M)$  deux configurations. On a*

$$d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) = \inf\{((S_0, \dots, S_k), (R_0, \dots, R_{k-1})) \mid S_0 = S, S_k = T\},$$

où  $((S_0, \dots, S_k), (R_0, \dots, R_{k-1}))$  parcourt les chaînes combinatoires FBA simples.

*Démonstration.* Par le Corollaire 3.11, l'infimum dans la définition de  $d_{\text{comb}}^\alpha(S, T)$  peut être calculé sur des chaînes combinatoires de la forme  $((S_0, \dots, S_k), (R_0, \dots, R_{k-1}))$  tel qu'il existe un  $0 \leq l < k - 1$  vérifiant

- $\text{card}(S_i) = \text{card}(R_i) \geq \text{card}(S_{i+1})$ , pour  $0 \leq i \leq l - 1$
- $\text{card}(S_{i+1}) = \text{card}(R_i) \geq \text{card}(S_i)$  pour  $l + 1 \leq i \leq k - 1$ ,
- $\text{card}(S_l) = \text{card}(R_l) = \text{card}(S_{l+1})$ .

On considère dans un premier temps la chaîne combinatoire,  $(R_0, \dots, R_{l-1})$  entre  $S$  et  $S_l$ . Montrons qu'il existe une chaîne combinatoire plus courte,  $(Q_0, \dots, Q_m)$ , telle que  $Q_i$  est une fusion simple lorsque  $i \leq m - 1$ , et  $Q_m$  est une bijection. En appliquant le lemme 3.16 aux relation  $R_i$ , on obtient des chaînes combinatoires  $(P_0^i, \dots, P_{m_i}^i)$  entre  $S_i$  et  $S_{i+1}$ , pour  $0 \leq i \leq l - 1$ , vérifiant

- $P_j^i$  est une fusion, lorsque  $0 \leq j \leq m_i - 1$ ,
- $P_{m_i}^i$  est une bijection,
- $\ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i) \geq \ell_{\text{comb}}^\alpha((P_0^i, \dots, P_{m_i}^i))$ .

Puis, des applications répétées du lemme 3.17 Permettent d'échanger les bijections  $P_{m_i}^i$  avec les fusion  $P_j^{i'}$ ,  $i < i' \leq l - 1$ . On obtient ainsi une chaîne de relations, composée d'abord de fusions, puis d'une séquence de bijections. On peut maintenant appliquer le lemme 3.18 pour remplacer les fusions  $P_j^i$  par des fusions simples. On obtient alors la forme souhaitée,  $(Q_0, \dots, Q_m)$  en composant les bijections finales. Il s'agit d'une chaîne combinatoire entre  $S$  et  $S_l$  composée de fusion simples, et d'une bijection,  $Q_m$ , vérifiant par construction,  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(Q_0, \dots, Q_m) \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{l-1})$ . De la même façon, en raisonnant sur la chaîne opposé à  $(R_{l+1}, \dots, R_{k-1})$ , on peut exhiber une chaîne combinatoire entre  $S_{l+1}$  et  $T$ ,  $(Q'_0, \dots, Q'_{m'})$ , composée d'une bijection  $Q'_0$ , puis d'anti-fusions simples, et vérifiant  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(Q'_0, \dots, Q'_{m'}) \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_{l+1}, \dots, R_{k-1})$ . On obtient finalement la forme désirée en concaténant les chaînes  $(Q_0, \dots, Q_m)$ ,  $(R_l)$  et  $(Q'_0, \dots, Q'_{m'})$ , puis en composant les trois bijections,  $Q_m$ ,  $R_l$  et  $Q'_0$ . On a finalement,

$$\begin{aligned} \ell_{\text{comb}}^\alpha(Q_0, \dots, Q_{m-1}, Q_m \circ R_l \circ Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_{m'}) & \\ & \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha((Q_0, \dots, Q_m) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_l) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(Q'_0, \dots, Q'_{m'})) \\ & \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{l-1}) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_l) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_{l+1}, \dots, R_{k-1}) \\ & \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) \end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré que l'infimum de la proposition 3.15 est inférieur à celui qui définit  $d_{\text{comb}}^\alpha(S, T)$ . Comme il est automatiquement supérieur, on a bien l'égalité souhaitée.  $\square$

**Lemme 3.16.** *Soient  $\alpha$  un poids,  $S, T \in \text{Ran}(M)$ , tels que  $\text{card}(S) \geq \text{card}(T)$  et  $R \subset S \times T$  une relation surjective telle que  $\text{card}(R) = \text{card}(S)$ . Alors, il existe une chaîne combinatoire  $(R_0, \dots, R_{k-1})$  entre  $S$  et  $T$  telle que*

- $\ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R)$
- $R_i$  est une fusion, pour tout  $0 \leq i < k - 1$ ,
- $R_{k-1}$  est une bijection.

*Démonstration.* Comme  $\text{card}(R) = \text{card}(S)$ , et comme  $R$  est une relation surjective,  $R$  est le graphe d'une fonction surjective,  $f: S \rightarrow T$ . On considère la décomposition suivante

$$\begin{aligned} T_- &= \{z \in T \mid \text{card}(f^{-1}(\{z\})) = 1\}, & S_- &= f^{-1}(T_-) \\ T_+ &= \{z \in T \mid \text{card}(f^{-1}(\{z\})) > 1\}, & S_+ &= f^{-1}(T_+) \end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  se restreint en une bijection entre les ensembles (potentiellement vides)  $S_-$  et  $T_-$ , et en une surjection  $f_+: S_+ \rightarrow T_+$ , injective en aucun point de son image. On va montrer le résultat par récurrence sur  $\text{card}(T_+)$ .

Si  $\text{card}(T_+) = 0$ , alors  $f$  est une bijection, et la chaîne combinatoire  $((S, T), (R))$  remplit les conditions de l'énoncé.

Soit  $l \geq 1$ , on suppose le résultat prouvé lorsque  $\text{card}(T_+) \leq l$ , et on suppose que  $\text{card}(T_+) = l + 1$ . On fixe  $z \in T_+$ , et on distingue deux cas.

- Si  $z \notin S \setminus f^{-1}(\{z\})$ , on pose  $\tilde{S} = S \setminus f^{-1}(z) \cup \{z\}$ . On définit alors  $f_0: S \rightarrow \tilde{S}$  via  $f_0(x) = x$ , si  $x \notin f^{-1}(z)$ . Et  $f_0(x) = z$  si  $x \in f^{-1}(z)$ . On remarque que  $f_0$  est une fusion, et on a l'égalité suivante.

$$\ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) = \alpha(\text{card}(S)) \sum_{x \in f^{-1}(z)} d_M(x, z).$$

Par ailleurs, on définit la fonction  $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow T$ , par  $\tilde{f}(x) = f(x)$  si  $x \neq z$ , et  $\tilde{f}(z) = z$ , et on remarque

$$\ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f}) = \alpha(\text{card}(\tilde{S})) \sum_{x \in S \setminus f^{-1}(z)} d_M(x, f(x))$$

Notons  $\tilde{T}_+ \subset T$  l'ensemble des points de  $T$  en lesquels  $\tilde{f}$  n'est pas injective. On note que par construction,  $\text{card}(\tilde{T}_+) < \text{card}(T_+) = l + 1$ , et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\tilde{f}$  pour obtenir une chaîne combinatoire  $((S_1, \dots, S_{k-1}), (R_1, \dots, R_{k-1}))$  de la forme souhaitée, vérifiant l'inégalité

$$\ell_{\text{comb}}^\alpha((S_1, \dots, S_{k-1}), (R_1, \dots, R_{k-1})) \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f})$$

On note finalement  $R_0 = f_0$ , et on calcule

$$\begin{aligned}
 \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) &= \ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_1, \dots, R_{k-1}) \\
 &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f}) \\
 &\leq \alpha(\text{card}(S)) \sum_{x \in f^{-1}(z)} d_M(x, z) + \alpha(\text{card}(\tilde{S})) \sum_{x \in S \setminus f^{-1}(z)} d_M(x, f(x)) \\
 &\leq \alpha(\text{card}(S)) \sum_{x \in S} d_M(x, f(x)) \\
 &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R)
 \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve de ce cas.

- Si  $z \in S \setminus f^{-1}(\{z\})$ , on fixe un  $y \in f^{-1}(\{z\})$ , et on pose  $\tilde{S} = S \setminus f^{-1}(z) \cup \{y\}$ , et on définit  $f_0: S \rightarrow \tilde{S}$  par  $f_0(x) = z$  si  $x \in f^{-1}(z) \setminus y$ , et  $f_0(x) = x$  sinon. La fonction  $f_0$  correspond bien à une fusion, puisque  $f_0^{-1}(z) = f^{-1}(z) \cup \{z\} \setminus \{y\}$  vérifie  $\text{card}(f_0^{-1}(z)) = \text{card}(f^{-1}(z)) \geq 2$ , et que tous les points de  $S$  qui ne sont pas envoyés sur  $z$  par  $f_0$  sont des points fixes par  $f_0$ . On remarque l'égalité

$$\ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) = \alpha(\text{card}(S)) \sum_{x \in f^{-1}(z) \setminus \{y\}} d_M(x, z).$$

On définit par ailleurs la fonction  $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow T$  par  $\tilde{f}(x) = f(x)$  pour tout  $x \in \tilde{S}$ . Cette dernière est bien surjective. En effet,  $f$  est surjective, et  $z$ , qui est l'image par  $f$  des points de  $S \setminus \tilde{S}$  est aussi l'image par  $\tilde{f}$  de  $y$ . On remarque alors

$$\begin{aligned}
 \ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f}) &= \alpha(\text{card}(\tilde{S})) \sum_{x \in \tilde{S}} d_M(x, f(x)) \\
 &= \alpha(\text{card}(\tilde{S})) \sum_{\substack{x \in S \\ x=y \text{ ou } f(x) \neq z}} d_M(x, f(x)).
 \end{aligned}$$

De même que dans le cas précédent, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\tilde{f}$ , pour obtenir une chaîne combinatoire de la forme souhaitée  $((S_1, \dots, S_k), (R_1, \dots, R_{k-1}))$ , vérifiant l'inégalité

$$\ell_{\text{comb}}^\alpha((S_1, \dots, S_{k-1}), (R_1, \dots, R_{k-1})) \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f})$$

on note finalement  $R_0 = f_0$ , et on calcule

$$\begin{aligned}
 \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) &= \ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_1, \dots, R_{k-1}) \\
 &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f}) \\
 &\leq \alpha(\text{card}(S)) \sum_{x \in f^{-1}(z) \setminus \{y\}} d_M(x, z) + \alpha(\text{card}(\tilde{S})) \sum_{\substack{x \in S \\ x=y \text{ ou } f(x) \neq z}} d_M(x, f(x)) \\
 &\leq \alpha(\text{card}(S)) \sum_{x \in S} d_M(x, f(x)) \\
 &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R)
 \end{aligned}$$

Ce qui conclut ce cas, et donc la preuve, par récurrence.  $\square$

**Lemme 3.17.** *Soient  $\alpha$  un poids,  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations et  $((S, S_1, T), (R_0, R_1))$  une chaîne combinatoire entre  $S$  et  $T$  telle que  $R_0$  est une bijection et  $R_1$  est une fusion. Alors, il existe une chaîne combinatoire  $(Q_0, \dots, Q_{k-1})$  entre  $S$  et  $T$ , telle que*

- $Q_i$  est une fusion, pour  $0 \leq i < k - 1$ ,
- $Q_{k-1}$  est une bijection,
- $\ell_{\text{comb}}^\alpha(Q_0, \dots, Q_{k-1}) \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, R_1)$ .

*Démonstration.* On considère la relation composée  $R = R_0 \circ R_1$ , définie par  $xRz$  si il existe  $y$  tel que  $xR_0y$  et  $yR_1z$ . Elle est bien surjective, puisque  $R_0$  et  $R_1$  sont surjectives, et on a  $\text{card}(R) = \text{card}(R_0) = \text{card}(R_1) = \text{card}(S)$ . On calcule

$$\begin{aligned}
 \ell_{\text{comb}}^\alpha(R) &= \alpha(\text{card}(S)) \sum_{xRz} d_M(x, z) \\
 &= \alpha(\text{card}(S)) \sum_{xR_0y} \sum_{yR_1z} d_M(x, z) \\
 &\leq \alpha(\text{card}(S)) \sum_{xR_0y} \sum_{yR_1z} (d_M(x, y) + d_M(y, z)) \\
 &\leq \alpha(\text{card}(S)) \left( \sum_{xR_0y} d_M(x, y) + \sum_{y'R_1z} d_M(y', z) \right) \\
 &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, R_1)
 \end{aligned}$$

On obtient finalement le résultat voulu en appliquant le lemme 3.16 à la relation  $R$ .  $\square$

**Lemme 3.18.** *Soient  $\alpha$  un poids,  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations, et  $R \subset S \times T$  une fusion. Il existe une chaîne combinatoire  $(R_0, \dots, R_{k-1})$  entre  $S$  et  $T$  telle que*

- $R_i$  est une fusion simple, pour tout  $0 \leq i \leq k - 1$ ,
- $\ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R)$

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $\text{card}(S) - \text{card}(T)$ . Par hypothèse,  $\text{card}(T) < \text{card}(S)$ , puisque  $R$  est une fusion. Si  $\text{card}(S) - \text{card}(T) = 1$ , alors  $R$  est une fusion simple, et il n'y a rien à montrer. Si  $\text{card}(S) - \text{card}(T) \geq 2$ , notons  $z \in T$  l'unique élément

de  $T$  telle que l'ensemble  $R_z = \{x \in S \mid xRz\}$  est de cardinal  $> 1$ . Par construction,  $\text{card}(R_z) = \text{card}(S) - \text{card}(T) + 1 \geq 3$ . On distingue deux cas

- si  $z \notin R_z$ , soient  $y_1 \neq y_2 \in R_z$  deux points distincts. On pose  $\tilde{S} = S \setminus \{y_1, y_2\} \cup \{z\}$ . On définit  $f_0: S \rightarrow \tilde{S}$  par  $f_0(x) = x$ , pour  $x \in R_z \setminus \{y_1, y_2\}$ , et  $f_0(x) = f(x)$  sinon. Autrement dit,  $f_0(x) = x$  pour tout  $x \in S \setminus \{y_1, y_2\}$ , et  $f_0(y_1) = f_0(y_2) = z$ . En particulier,  $f_0$  est une fusion simple, de longueur  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) = \alpha(\text{card}(S))(d_M(y_1, z) + d_M(y_2, z))$ . D'autre part, on définit  $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow T$  par  $\tilde{f}(x) = f(x)$  si  $x \neq z$ ,  $\tilde{f}(z) = z$ .  $\tilde{f}$  est encore une fusion, et vérifie  $\text{card}(\tilde{S}) - \text{card}(T) = \text{card}(S) - \text{card}(T) - 1$ . On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir une chaîne combinatoire de la forme souhaitée  $(R_1, \dots, R_{k-1})$ . En posant  $R_0 = f_0$ , on obtient une chaîne combinatoire entre  $S$  et  $T$ , composée de fusions simples,  $(R_0, \dots, R_{k-1})$ . On calcule :

$$\begin{aligned}
 \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) &= \ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_1, \dots, R_{k-1}) \\
 &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f}) \\
 &\leq \alpha(\text{card}(S))(d_M(y_1, z) + d_M(y_2, z)) + \alpha(\text{card}(\tilde{S})) \left( \sum_{x \in \tilde{f}^{-1}(z)} d_M(x, z) \right) \\
 &\leq \alpha(\text{card}(S)) \left( \sum_{x \in f^{-1}(z)} d_M(x, z) \right) \\
 &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R)
 \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve de ce cas.

- Si  $z \in R_z$ , on fixe un  $y \neq z \in R_z$ , et on pose  $\tilde{S} = S \setminus \{y\}$ . On définit une fonction  $f_0: S \rightarrow \tilde{S}$  par  $f_0(x) = x$  si  $x \neq y$ ,  $f_0(y) = z$ . On constate que  $f_0$  est une fusion simple, de longueur  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) = \alpha(\text{card}(S))d_M(y, z)$ . On définit par ailleurs la fonction  $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow T$  par  $\tilde{f}(x) = f(x)$ , pour tout  $x \in \tilde{S}$ .  $\tilde{f}$  est une fusion, et vérifie  $\text{card}(\tilde{S}) - \text{card}(T) = \text{card}(S) - \text{card}(T) - 1$ , on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\tilde{f}$ , pour obtenir une chaîne combinatoire de la forme souhaitée  $(R_1, \dots, R_{k-1})$ . En posant  $R_0 = f_0$ , on obtient une chaîne combinatoire entre  $S$  et

$T$ , composée uniquement de fusions simples,  $(R_0, \dots, R_{k-1})$ , et on a

$$\begin{aligned}
 \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) &= \ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_1, \dots, R_{k-1}) \\
 &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f}) \\
 &\leq \alpha(\text{card}(S)) (d_M(y, z)) + \alpha(\text{card}(\tilde{S})) \left( \sum_{x \in \tilde{f}^{-1}(z)} d_M(x, z) \right) \\
 &\leq \alpha(\text{card}(S)) \left( \sum_{x \in f^{-1}(z)} d_M(x, z) \right) \\
 &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R)
 \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve de ce cas, et donc la preuve, par récurrence.  $\square$

**3.5. Réalisation de la distance combinatoire.** Cette section est consacrée à montrer le théorème suivant :

**Théorème 3.19.** *Soient  $\alpha$  un poids, et  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations. Il existe une chaîne combinatoire entre  $S$  et  $T$ ,  $((S_0, \dots, S_k), (R_0, \dots, R_{k-1}))$ , telle que*

$$d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) = \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1})$$

*De plus, on peut supposer qu'il s'agit d'une chaîne FBA simple.*

*Démonstration.* Par la proposition 3.15,  $d_{\text{comb}}^\alpha(S, T)$  peut être calculé comme un infimum sur l'ensemble des chaînes combinatoires FBA simples entre  $S$  et  $T$ . De plus, en notant  $n = \text{card}(S)$  et  $m = \text{card}(T)$ , on observe qu'une chaîne FBA simple  $(R_0, \dots, R_{k-1})$  entre  $S$  et  $T$  doit vérifier  $k = (n - l) + (m - l) + 1$ , ou  $l = \min\{\text{card}(R_i) \mid 0 \leq i \leq k - 1\}$ . En particulier, il n'existe qu'un nombre fini de valeurs possibles pour  $k$ , puisqu'on doit avoir  $k \leq n + m$ . On peut donc réécrire l'infimum sous la forme

$$d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) = \min_{1 \leq k \leq n+m} \left\{ \inf \{ \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) \} \right\}.$$

Fixons un  $k \geq 1$ , et montrons que l'infimum  $\inf \{ \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) \}$ , est réalisé. toute chaîne combinatoire FBA entre  $S$  et  $T$  de la forme  $(R_0, \dots, R_{k-1})$  doit vérifier  $\text{card}(R_i) = n_i$ , où la suite  $(n_0, \dots, n_{k-1})$  est entièrement déterminée par  $k$ ,  $\text{card}(S)$  et  $\text{card}(T)$ . En appliquant le 3.22, peut réécrire l'infimum sous la forme

$$d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) = \min_{1 \leq k \leq n+m} \left\{ \inf \left\{ \left( \sum_{i=0}^{k-1} \alpha(n_i) d_\Sigma(X_{2i}, X_{2i+1}) \right) \right\} \right\}$$

où  $(X_0, \dots, X_{2k-1})$ , parcourt toutes les suites vérifiant les points 1, 2 et 3, avec la suite  $(n_0, \dots, n_{k-1})$  fixée. Notons  $M^{(n_0, \dots, n_{k-1})} = \prod_{i=0}^{k-1} (M^{n_i} \times M^{n_i})$ . La condition 1 pour une suite  $(X_0, \dots, X_{2k-1})$  correspond à demander  $(X_0, \dots, X_{2k-1}) \in M^{(n_0, \dots, n_{k-1})}$ . Fixons

$\epsilon > 0$ , et notons  $r = d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) + \epsilon$ . Pour calculer l'infimum, on peut se restreindre aux suites telles que  $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha(n_i) d_\Sigma(X_{2i}, X_{2i+1}) \leq r$ . Notons

$$K = \prod_{i=0}^{k-1} (B_F^{n_i}(S, r) \times B_F^{n_i}(S, r)) \subset M^{(n_0, \dots, n_{k-1})}.$$

Par le lemme 3.23, pour de telles suites, on a  $(X_0, \dots, X_{2k-1}) \in K$ . Par construction,  $K$  est un produit de compacts, c'est donc un compact. On note par ailleurs  $L \subset M^{(n_0, \dots, n_{k-1})}$ , le sous-ensemble des suites vérifiant aussi les points 2 et 3, c'est à dire :

$$L = \{(X_0, \dots, X_{2k-1}) \mid \pi_{n_0}(X_0) = S, \pi_{n_{k-1}}(X_{2k-1}) = T, \pi_{n_i}(X_{2i}) = \pi_{n_{i-1}}(X_{2i-1})\}$$

Comme les fonctions  $\pi_{n_i}$  sont des fonctions continues, vers un espace séparé,  $L$  est un sous-ensemble fermé. On constate finalement que l'infimum recherché est l'infimum de la fonction suivante

$$f_k: K \cap L \rightarrow [0, +\infty[ \\ (X_0, \dots, X_{2k-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} \alpha(n_i) d_\Sigma(X_{2i}, X_{2i+1})$$

Cette fonction est continue, par définition, et définie sur  $K \cap L$  qui est compact, car intersection d'un compact et d'un fermé. Elle admet donc un minimum. La chaîne combinatoire correspondant au minimum de  $f_k$  est la plus courte, parmi les chaînes combinatoires de la forme  $(R_0, \dots, R_{k-1})$ . En prenant le minimum sur  $k \geq 1$ , on obtient finalement l'existence d'une chaîne combinatoire réalisant la distance combinatoire. Par la proposition 3.15, on peut supposer que cette chaîne combinatoire est une FBA.  $\square$

**Définition 3.20.** Soient  $n \geq 1$ , et  $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in M^n$ . On note  $R_{X,Y} \subset \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$  la relation définie par

$$xR_{X,Y}y \Leftrightarrow \exists 1 \leq i \leq n, x_i = x, y_i = y$$

**Lemme 3.21.** Soient  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations,  $n \geq 1$ , et  $R \subset S \times T$  une relation surjective telle que  $\text{card}(R) = n$ . Alors, il existe  $X, Y \in M^n$  tels que  $\pi_n(X) = S$ ,  $\pi_n(Y) = T$ ,  $R_{X,Y} = R$ , et

$$\ell_{\text{comb}}^\alpha(R) = \alpha(n) d_\Sigma(X, Y).$$

*Démonstration.* On fixe une bijection  $\phi: \{1, \dots, n\} \rightarrow R$ , et on note  $\phi(i) = (x_i, y_i)$ . On pose alors  $X = (x_1, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, \dots, y_n)$ . Comme  $R$  est surjective, par hypothèse, on a bien  $\pi_n(X) = S$ , et  $\pi_n(Y) = T$ . De plus, par définition de  $R_{X,Y}$ , on a  $R = R_{X,Y}$ .

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
 \ell_{\text{comb}}^\alpha(R) &= \alpha(n) \sum_{xRy} d_M(x, y) \\
 &= \alpha(n) \sum_{xR_{X,Y}y} d_M(x, y) \\
 &= \alpha(n) \sum_{i=1}^n d_M(x_i, y_i) \\
 &= \alpha(n) d_\Sigma(X, Y)
 \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.22.** *Soient  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations. Si  $((S_0, \dots, S_k), (R_0, \dots, R_{k-1}))$  est une chaîne combinatoire entre  $S$  et  $T$ , avec  $\text{card}(R_i) = n_i$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ . Il existe une suite  $(X_0, \dots, X_{2k-1})$  telle que*

- (1)  $X_{2i}, X_{2i+1}$  in  $M^{n_i}$ ,  $0 \leq i \leq k-1$
- (2)  $\pi_{n_0}(X_0) = S$ ,  $\pi_{n_{k-1}}(X_{2k-1}) = T$ .
- (3)  $\pi_{n_i}(X_{2i}) = \pi_{n_{i-1}}(X_{2i-1})$ ,  $1 \leq i \leq k-1$
- (4)  $R_i = R_{X_{2i}, X_{2i+1}}$ ,  $0 \leq i \leq k-1$
- (5)  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha(n_i) d_\Sigma(X_{2i}, X_{2i+1})$

Réciproquement, si  $(n_0, \dots, n_{k-1})$  et  $(X_0, \dots, X_{2k-1})$  sont des suites vérifiant les points 1, 2, et 3, il existe une chaîne combinatoire entre  $S$  et  $T$ ,  $((S_0, \dots, S_{k-1}), (R_0, \dots, R_{k-1}))$ , vérifiant les points 4 et 5.

*Démonstration.* On applique le lemme 3.21, à chacun des  $R_i$ , pour obtenir les termes  $X_{2i}, X_{2i+1}$  de la suite  $(X_0, \dots, X_{2k-1})$ . Par construction, les points 1, 2 et 4 sont vérifiés. De plus, comme  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i)$ , le lemme 3.21 implique aussi le point 5. Finalement, comme par construction  $\pi_{n_i}(X_{2i}) = S_i$  et  $\pi_{n_i}(X_{2i+1}) = S_{i+1}$ , on en déduit le point 3. Pour la réciproque, il suffit de considérer la chaîne combinatoire  $(R_{X_0, X_1}, \dots, R_{X_{2k-2}, X_{2k-1}})$ . Le point 1 garanti que ces relations sont bien définies, le point 3 garanti qu'il s'agit bien d'une chaîne combinatoire, et le point 2 garanti qu'elle est entre  $S$  et  $T$ . La chaîne combinatoire vérifie le point 4, par construction, et le point 5 est vérifié, car  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(R_{X,Y}) = \alpha(\text{card}(R_{X,Y})) d_\Sigma(X, Y)$ . □

**Lemme 3.23.** *Soient  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations,  $(R_0, \dots, R_{k-1})$  une chaîne combinatoire entre  $S$  et  $T$ , et  $(n_0, \dots, n_{k-1}), (X_0, \dots, X_{2k-1})$  deux suites obtenues à partir de  $(R_0, \dots, R_{k-1})$  par le lemme 3.22. Alors, pour tout  $0 \leq i \leq 2k-1$ , on a*

$$X_{2i}, X_{2i+1} \in B_F^{n_i}(S, \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1})),$$

où  $B_F^n(S, r) = B_F(S, r)^n \subset M^n$ , avec  $B_F(S, r) = \{x \in M \mid d_M(x, S) \leq r\}$ , pour tout  $r \geq 0$ .

*Démonstration.* On prouve l'énoncé seulement pour les termes de la forme  $X_{2i}$ , le cas  $X_{2i+1}$  étant similaire. On note  $X_{2i} = (x_1, \dots, x_{n_i})$ , et on fixe  $1 \leq j \leq n_i$  montrons que  $x_j \in B_F(S, \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}))$ , c'est à dire  $d_M(x_j, S) \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1})$ . Si  $i = 0$ , c'est clair, puisque  $X_0 = S$ . Si  $i \geq 1$ , comme les relations  $R_0, \dots, R_{i-1}$  sont supposées



surjectives, il doit exister une suite  $y_0, \dots, y_i$ , où  $y_l \in S_l$  pour tout  $0 \leq l \leq i$ , tels que  $y_l R_l y_{l+1}$ , pour tout  $0 \leq l \leq i-1$ , et tels que  $y_i = x_j$ . Mais on a alors

$$\begin{aligned} d_M(x_j, S) &\leq d_M(x_j, y_0) \\ &\leq \sum_{l=0}^{i-1} d_M(y_l, y_{l+1}) \\ &\leq \sum_{l=0}^{i-1} \sum_{y R_l z} d_M(y, z) \\ &\leq \sum_{l=0}^{i-1} \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_l) \\ &\leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1}) \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat voulu.  $\square$

**3.6. Chemins  $\alpha$ -optimaux.** On a montré dans la section précédente que la distance entre deux configurations  $S$  et  $T$  est réalisée par une chaîne combinatoire. Il reste à en déduire qu'elle est réalisée par un chemin  $C^1$  par morceaux, et à caractériser les chemins qui réalisent la longueur. C'est l'objet de cette section.

**Définition 3.24.** Soient  $\alpha$  un poids, et  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations. Un chemin  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  entre  $S$  et  $T$  est dit  $\alpha$ -optimal si

- $\gamma$  est  $C^1$  par morceaux et vérifie  $\ell^\alpha(\gamma) = d^\alpha(S, T)$ ,
- $\gamma$  est un chemin crénelé, de cardinal décroissant puis croissant.

**Théorème 3.25.** Soient  $\alpha$  un poids,  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations.

- (1) Si  $M$  est une variété riemannienne complète, il existe un chemin  $\alpha$ -optimal entre  $S$  et  $T$ .
- (2) Si  $\alpha$  est strictement croissant, tout chemin  $\alpha$ -optimal entre  $S$  et  $T$  provient d'une chaîne combinatoire FBA simple.

*Démonstration.* Par le théorème 3.19, il existe une chaîne combinatoire  $(R_0, \dots, R_{k-1})$  entre  $S$  et  $T$  telle que  $d^\alpha(S, T) = d_{\text{comb}}^\alpha(S, T) = \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_0, \dots, R_{k-1})$ . En appliquant la proposition 3.7 à chaque relation  $R_l$ , on obtient un chemin  $C^1$  par morceaux,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  vérifiant  $\ell^\alpha(\gamma) \leq d^\alpha(S, T)$ . Puis, par la proposition 2.21, il existe un chemin,  $\mu: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$ , crénelé et de cardinal décroissant puis croissant, vérifiant  $\ell^\alpha(\mu) \leq \ell^\alpha(\gamma)$ . Mais alors,  $\ell^\alpha(\mu) \leq d^\alpha(S, T)$ , et  $d^\alpha(S, T) = d_{\text{curv}}^\alpha(S, T) \leq \ell^\alpha(\mu)$ , par définition de la distance  $d_{\text{curv}}^\alpha(S, T)$ . On en déduit que  $\mu$  est un chemin  $\alpha$ -optimal.

Pour le deuxième point, supposons que  $\alpha$  est strictement croissante, et fixons  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $\alpha$ -optimal. Puisqu'il s'agit en particulier d'un chemin crénelé, de cardinal décroissant puis croissant, il existe une subdivision  $a = t_0 < \dots < t_k = b$ ,  $0 \leq l \leq k-1$ , et des entiers  $(n_0, \dots, n_{k-1})$  tels que

- $n_i \neq n_{i+1}$ ,  $0 \leq i \leq k-2$ ,
- $\text{card}(\gamma(t)) = n_i$  pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}[$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ ,

- $\text{card}(\gamma(t)) = n_l$ , pour tout  $t \in [t_l, t_{l+1}]$ ,
- $\text{card}(\gamma(t)) = n_i$  pour tout  $t \in ]t_i, t_{i+1}]$ ,  $l + 1 \leq i \leq k - 1$ ,

De plus, on a

$$d^\alpha(S, T) = \ell^\alpha(\gamma) = \sum_{i=0}^{k-1} \ell^\alpha(\gamma_{[t_i, t_{i+1}]}) .$$

Soit  $0 \leq i \leq k - 1$ . Par la proposition 3.9, il existe une relation  $R_i$  telle que  $\ell^\alpha(\gamma_{[t_i, t_{i+1}]}) = \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i)$ . Comme  $\gamma$  est  $\alpha$ -optimal, l'inégalité précédente doit être une égalité. Par la proposition 2.10, il existe un relèvement de  $\gamma_{[t_i, t_{i+1}]}$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n_i}) : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M^{n_i}$ , tel que  $\ell^\alpha(\mu) = \ell^\alpha(\gamma_{[t_i, t_{i+1}]}) = \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i)$ . En particulier, on a

$$\alpha(n_i) \sum_{j=1}^{n_i} \ell(\mu_j) = \ell^\alpha(\mu) = \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i) = \alpha(n_i) \sum_{j=1}^{n_i} d_M(\mu_j(t_i), \mu_j(t_{i+1})) .$$

Comme, par ailleurs, pour tout  $1 \leq j \leq n_i$ , on a  $\ell(\mu_j) \geq d_M(\mu_j(t_i), \mu_j(t_{i+1}))$ , on en déduit que pour tout  $1 \leq j \leq n_i$ ,  $\ell(\mu_j) = d_M(\mu_j(t_i), \mu_j(t_{i+1}))$ . En particulier, pour tout  $1 \leq j \leq n_i$ ,  $\mu_j$  est un chemin géodésique minimal entre  $\mu_j(t_i)$  et  $\mu_j(t_{i+1})$ . On en déduit finalement que  $\gamma_{[t_i, t_{i+1}]}$  est un chemin direct associé à  $R_i$ . L'observation précédente sur les cardinaux de  $\gamma(t)$  implique de plus que

- $R_i$  est le graphe d'une fonction surjective, pour  $0 \leq i \leq l - 1$ ,
- $R_l$  est le graphe d'une bijection,
- $R_i^{\text{op}}$  est le graphe d'une fonction surjective, pour  $l + 1 \leq i \leq k - 1$ .

Montrons que  $R_i$  est une fusion simple, lorsque  $0 \leq i \leq l - 1$ , ce qui conclura la preuve, puisque l'argument symétrique montrera que  $R_i$  est une anti-fusion lorsque  $l + 1 \leq i \leq k - 1$ . Soit  $0 \leq i \leq l - 1$ , et notons  $f : S_i \rightarrow S_{i+1}$  la fonction dont  $R_i$  est le graphe. Par construction,  $f$  n'est pas injective. Soit  $z \in S_{i+1}$  tel que  $\text{card}(f^{-1}(z)) \geq 2$ . On distinguera deux cas.

- Si  $z \notin S_i \setminus f^{-1}(z)$ , on fixe  $y_1 \neq y_2 \in f^{-1}(z)$  (si  $z \in f^{-1}(z)$ , on choisit  $y_1 = z$ ). On pose,  $\tilde{S} = S \setminus \{y_1, y_2\} \cup \{z\}$ . On définit d'abord  $f_0 : S_i \rightarrow \tilde{S}$ , par  $f_0(x) = x$ , si  $x \neq y_1, y_2$ , et  $f_0(y_1) = f_0(y_2) = z$ . On remarque que par définition,  $f_0$  est une fusion simple. On définit ensuite  $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow S_{i+1}$ , par  $\tilde{f}(x) = f(x)$ , si  $x \neq z$ ,  $\tilde{f}(z) = z$ . On vérifie que, par construction,  $\tilde{f}$  est une fonction surjective, et on calcule

$$\ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) = \alpha(\text{card}(S_i))(d_M(y_1, z) + d_M(y_2, z))$$

$$\ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f}) = \alpha(\text{card}(\tilde{S})) \sum_{x \in S \setminus \{y_1, y_2\}} d_M(x, f(x))$$

Par ailleurs, comme  $(f_0, \tilde{f})$  est une chaîne combinatoire entre  $S_i$  et  $S_{i+1}$ , et que  $R_i$  est de longueur minimale parmi celles-ci, on doit avoir  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i) \leq \ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) +$

$\ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f})$ . Il vient

$$\begin{aligned} \ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f}) &= \alpha(\text{card}(S_i))(d_M(y_1, z) + d_M(y_2, z)) + \alpha(\text{card}(\tilde{S})) \sum_{x \in S \setminus \{y_1, y_2\}} d_M(x, f(x)) \\ &\geq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i) \\ &\geq \alpha(\text{card}(S_i)) \sum_{x \in S_i} d_M(x, f(x)) \\ &\geq \alpha(\text{card}(S_i))(d_M(y_1, z) + d_M(y_2, z)) + \alpha(\text{card}(S_i)) \sum_{x \in S \setminus \{y_1, y_2\}} d_M(x, f(x)) \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$(1) \quad \alpha(\text{card}(\tilde{S})) \sum_{x \in S \setminus \{y_1, y_2\}} d_M(x, f(x)) \geq \alpha(\text{card}(S_i)) \sum_{x \in S \setminus \{y_1, y_2\}} d_M(x, f(x)).$$

Par construction,  $\text{card}(\tilde{S}) = \text{card}(S_i) - 2$  ou  $\text{card}(S_i) - 1$ , selon que  $z$  appartient ou non à  $\{y_1, y_2\}$ . Dans tous les cas, on a  $\text{card}(\tilde{S}) < \text{card}(S_i)$ . Comme  $\alpha$  est strictement croissante par hypothèse, l'inégalité (1) ne peut être vérifiée que si  $\sum_{x \in S \setminus \{y_1, y_2\}} d_M(x, f(x)) = 0$ . On en déduit que  $f = f_0$  est une fusion simple, ce qui conclut la preuve dans ce cas.

- si  $z \in S_i \setminus f^{-1}(z)$ , on fixe  $y_0 \neq y_1 \in f^{-1}(z)$ , et on pose  $\tilde{S} = S \setminus \{y_1\}$ . On définit la fonction surjective  $f_0: S_i \rightarrow \tilde{S}$  par  $f_0(x) = x$ , si  $x \neq y_1$ ,  $f_0(y_1) = z$ . On constate que  $f_0$  est une fusion simple. On définit ensuite la fonction  $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow S_{i+1}$  par  $\tilde{f}(x) = f(x)$ , pour tout  $x \in \tilde{S}$ . On vérifie aisément que  $\tilde{f}$  est surjective, puisque tout les points de  $S_{i+1}$  sont atteints, y compris  $z$ , qui est l'image de  $y_0$ . On calcule alors

$$\begin{aligned} \ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) &= \alpha(\text{card}(S_i))(d_M(y_1, z)) \\ \ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f}) &= \alpha(\text{card}(\tilde{S})) \sum_{x \in S \setminus \{y_1\}} d_M(x, f(x)) \end{aligned}$$

Comme précédemment, on doit avoir  $\ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f}) \geq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i)$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} \ell_{\text{comb}}^\alpha(f_0) + \ell_{\text{comb}}^\alpha(\tilde{f}) &= \alpha(\text{card}(S_i))(d_M(y_1, z)) + \alpha(\text{card}(\tilde{S})) \sum_{x \in S \setminus \{y_1\}} d_M(x, f(x)) \\ &\geq \ell_{\text{comb}}^\alpha(R_i) \\ &\geq \alpha(\text{card}(S_i)) \sum_{x \in S_i} d_M(x, f(x)) \\ &\geq \alpha(\text{card}(S_i))(d_M(y_1, z)) + \alpha(\text{card}(S_i)) \sum_{x \in S \setminus \{y_1\}} d_M(x, f(x)) \end{aligned}$$

d'où on déduit, comme précédemment

$$\sum_{x \in S \setminus \{y_1\}} d_M(x, f(x)) = 0$$

ce qui implique que  $f = f_0$  est une fusion simple (ainsi que d'autres contradictions), ce qui conclut cette preuve.  $\square$

Finalement, on déduit l'énoncé suivant sur les chemins  $\alpha$ -optimaux. Il sera utile dans la suite de cet article, et illustre les propriétés des chemins  $\alpha$ -optimaux comme "géodésiques" de  $\text{Ran}(M)$ .

**Proposition 3.26.** *Soient  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations et  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $\alpha$ -optimal entre  $S$  et  $T$ . Alors, pour tout  $t \in [a, b]$ ,*

$$d^\alpha(S, T) = d^\alpha(S, \gamma(t)) + d^\alpha(\gamma(t), T)$$

*En particulier, pour tout  $t_1 < t_2 \in [a, b]$ ,  $\gamma|_{[t_1, t_2]}$  est un chemin  $\alpha$ -optimal entre  $\gamma(t_1)$  et  $\gamma(t_2)$ .*

*Démonstration.* L'inégalité triangulaire, donne

$$d^\alpha(S, T) \leq d^\alpha(S, \gamma(t)) + d^\alpha(\gamma(t), T)$$

Réciproquement, par définition de la distance curviligne, on a

$$d^\alpha(S, \gamma(t)) \leq \ell^\alpha(\gamma|_{[a, t]}) \text{ et } d^\alpha(\gamma(t), T) \leq \ell^\alpha(\gamma|_{[t, b]})$$

d'où il vient

$$\begin{aligned} d^\alpha(S, T) &\leq d^\alpha(S, \gamma(t)) + d^\alpha(\gamma(t), T) \\ &\leq \ell^\alpha(\gamma|_{[a, t]}) + \ell^\alpha(\gamma|_{[t, b]}) \\ &\leq \ell^\alpha(\gamma) \\ &\leq d^\alpha(S, T) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité souhaité. Finalement, comme les restrictions de  $\gamma$  sont toujours crénelées et de cardinal décroissant puis croissant, on en déduit que les restrictions de  $\gamma$  sont des chemins  $\alpha$ -optimaux, ce qui conclut cette preuve.  $\square$

#### 4. DISTANCES ET TOPOLOGIES

Dans cette section, on s'intéresse aux topologies induites sur  $\text{Ran}(M)$  par les différentes distances  $d^\alpha$ , qu'on appelle topologies **pondérées**. On commencera par un exemple pour illustrer les propriétés de convergences des suites pour les topologies pondérées. Ensuite, en Section 4.1 on comparera entre elles les topologies pondérées, en particulier on montrera qu'il existe une infinité non dénombrable de topologies distinctes. Puis, en Section 4.2, on comparera les topologies pondérées aux topologies classiques : topologie faible et topologie de Hausdorff. En particulier, on montrera que ces topologies sont intermédiaires entre la topologie de Hausdorff et la topologie faible (propositions 4.9 et 4.10), et que leur limite inverse coïncide avec la topologie faible (théorème 4.12). Enfin, on déduira en Section 4.3 quelques propriétés de la topologie faible, dont certaines sont déjà connues (proposition 4.13 et corollaire 4.15), mais qui sont très facilement redémontrées avec les outils mis en place dans cet article.

Pour un poids  $\alpha$ , on note  $\tau^\alpha$  la topologie induite par  $d^\alpha$  sur  $\text{Ran}(M)$ , et, pour  $S \in \text{Ran}(M)$  et  $r > 0$ , on note  $B^\alpha(S, r) = \{T \in \text{Ran}(M) \mid d^\alpha(S, T) < r\}$  la boule ouverte pour  $\tau^\alpha$  centrée en  $S$  et de rayon  $r$ , et  $B_H(S, r) = \{T \in \text{Ran}(M) \mid d_H(S, T) < r\}$ .

*Exemple 4.1.* On détaille ici un exemple d'une suite de configurations, de cardinal strictement croissant, dont on peut montrer qu'elle converge vers un singleton pour une topologie  $\tau^\alpha$  fixée.

On fixe un poids  $\alpha$  et on pose, pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\epsilon_{n,k} = \frac{1}{n^2 \alpha(k)}$$

Soit  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  une géodésique minimale entre  $x \neq y \in M$ . Quitte à renormaliser  $\gamma$  et  $d_M$ , on peut supposer que  $\gamma$  est de longueur égale à 1 et paramétrée par sa longueur. On définit alors  $S_0 = \{\gamma(0)\}$ , et, pour tout  $n \geq 1$

$$S_n = \left\{ \gamma \left( \sum_{k=1}^j \epsilon_{n,k} \right) \mid 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Un exemple d'une telle configuration est schématisé en Fig. 2.

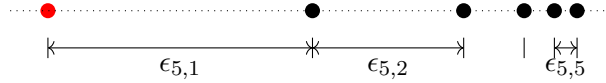


FIGURE 2. Deux configurations de l'Exemple 4.1,  $S_0$  en rouge et  $S_5$  en noir, à distance  $d^\alpha(S_0, S_5) \leq \sum_{i=1}^5 \alpha(i)\epsilon_{5,i}$ . Les pointillés représentent la géodésique  $\gamma$ .

Soit  $n \geq 1$ . On définit le chemin  $\mu: [0, n] \rightarrow \text{Ran}(M)$  par ses restrictions aux segments  $[i, i+1]$  où  $0 \leq i < n$

$$\mu_{|[i, i+1]}: [i, i+1] \rightarrow \text{Ran}(M)$$

$$t \mapsto \left\{ \gamma \left( \sum_{k=1}^j \epsilon_{n,k} \right) \mid 1 \leq j \leq n - (i+1) \right\} \cup \left\{ \gamma \left( \epsilon_{n, n-i}(i+1-t) + \sum_{k=1}^{n-(i+1)} \epsilon_{n,k} \right) \right\}.$$

On vérifie que  $\mu$  est un chemin  $C^1$  par morceaux entre  $S_n$  et  $S_0$  de cardinal  $n - i$  sur  $[i, i+1]$ . Sa longueur est donnée par

$$\ell^\alpha(\mu) = \sum_{i=1}^n \ell^\alpha(\mu_{|[i, i+1]}) = \sum_{k=1}^n \alpha(k)\epsilon_{n,k} = \sum_{k=1}^n \alpha(k) \frac{1}{n^2 \alpha(k)} = \frac{1}{n}$$

On a donc  $d^\alpha(S_n, S_0) \leq \ell^\alpha(\mu) = \frac{1}{n}$ . On en déduit que la suite  $S_n$  converge vers  $S_0$  pour la topologie  $\tau^\alpha$ .

**Lemme 4.2.** *Soient  $\alpha$  un poids,  $S, T \in \text{Ran}(M)$  deux configurations, avec  $\text{card}(S) > 1$ , et  $\gamma: [a, b] \rightarrow \text{Ran}(M)$  un chemin  $\alpha$ -optimal de  $S$  à  $T$ . On pose  $\epsilon = \min_{x \neq y \in S} \{d_M(x, y)\}$ . Si il existe  $c \in ]a, b]$  tel que  $\text{card}(\gamma(c)) < \text{card}(S) = n$ , alors*

$$d^\alpha(S, T) = \ell^\alpha(\gamma) \geq \alpha(n)\epsilon.$$

*En particulier, si  $T \in B^\alpha(S, \epsilon)$ , alors  $\text{card}(\gamma)$  est croissant, et donc  $\text{card}(T) \geq \text{card}(S)$*

*Démonstration.* On note  $n = \text{card}(S)$ . Comme  $\gamma$  est crénelé, il existe  $d \in ]a, c]$  tel que  $\text{card}(\gamma(t)) = n, \forall t \in [a, d[$  et  $\text{card}(\gamma(d)) < n$ . Par la proposition 2.10, il existe un relèvement  $C^1$  par morceaux de  $\gamma|_{[a, d]}$ ,  $\mu: [a, d] \rightarrow M^n$  tel que  $\ell^\alpha(\gamma|_{[a, d]}) = \ell^\alpha(\mu)$ . Comme  $\text{card}(\gamma(d)) = \text{card}(\pi_n(\mu(d))) < n$ , il existe  $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $\mu_i(d) = \mu_j(d)$ . Or,  $\text{card}(\gamma(a)) = \text{card}(\pi_n(\mu(a))) = n$ , donc  $\mu_i(a) \neq \mu_j(a)$ . Et donc finalement

$$\begin{aligned} d^\alpha(S, T) = \ell^\alpha(\gamma) &\geq \ell^\alpha(\gamma|_{[a, d]}) \\ &\geq \ell^\alpha(\mu) \\ &\geq \alpha(n) \sum_{k=1}^n d_M(\mu_k(a), \mu_k(d)) \\ &\geq \alpha(n) (d_M(\mu_i(a), \mu_i(d)) + d_M(\mu_j(a), \mu_j(d))) \\ &\geq \alpha(n) d_M(\mu_i(a), \mu_j(a)) \\ &\geq \alpha(n) \min_{x \neq y \in S} \{d_M(x, y)\} \end{aligned}$$

□

**4.1. Comparaisons des topologies pondérées.** On définit ici une relation d'ordre sur les poids, et le foncteur  $\text{Ran}^-(M)$  du poset des poids vers les espaces topologiques (définition 4.3). On montrera dans la section suivante que la limite inverse de ce foncteur est isomorphe à  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$  (théorème 4.12).

**Définition 4.3.** On note  $\mathbb{W}$  le poset dont les éléments sont les poids, et dont la relation d'ordre est donnée par

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \exists N > 0, \forall n \geq N, \alpha(n) \leq \beta(n).$$

Dans ce qui suit, on considère le poset  $\mathbb{W}$  comme une catégorie. On considère le foncteur

$$\text{Ran}^-(M): \mathbb{W}^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$$

qui à  $\alpha \in \mathbb{W}$  associe  $\text{Ran}^\alpha(M) = (\text{Ran}(M), \tau^\alpha)$  et qui, à  $\alpha \rightarrow \beta \in \mathbb{W}$  associe  $\text{Id}_{\text{Ran}(M)}: \text{Ran}^\beta(M) \rightarrow \text{Ran}^\alpha(M)$ .

**Proposition 4.4.** *Soient  $\alpha \leq \beta \in \mathbb{W}$  deux poids, alors  $\tau^\beta$  raffine  $\tau^\alpha$ . En particulier, le foncteur  $\text{Ran}^-(M): \mathbb{W}^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$  est bien défini.*

*Démonstration.* Soient  $S \in \text{Ran}(M)$  et  $r > 0$ . Montrons qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $B^\beta(S, \epsilon) \subset B^\alpha(S, r)$ . Comme  $\alpha \leq \beta$ , il existe  $N > 0$  tel que,  $\alpha(n) \leq \beta(n)$  pour tout

$n \geq N$ . On pose alors

$$\epsilon = \frac{r}{1 + \sum_{n=1}^N \alpha(n)} > 0.$$

Soit  $T \in B^\beta(S, \epsilon)$ . Par le théorème 3.25, il existe un chemin  $\beta$ -optimal de  $S$  à  $T$ , dont la longueur cumulée des tronçons de cardinal  $n$  est  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \geq 1$ . On a donc  $d^\beta(S, T) = \sum_{n \geq 1} \beta(n)u_n < \epsilon$ . De plus, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n \leq \beta(n)u_n \leq \sum_{k \geq 1} \beta(k)u_k < \epsilon$ . Ainsi

$$\begin{aligned} d^\alpha(S, T) &\leq \sum_{n \geq 1} \alpha(n)u_n \\ &\leq \sum_{n \geq N} \beta_n u_n + \sum_{n=1}^N \alpha(n)u_n \\ &< \epsilon + \sum_{n=1}^N \alpha(n)\epsilon \\ &< r \end{aligned}$$

Donc,  $B^\beta(S, \epsilon) \subset B^\alpha(S, r)$ . La topologie  $\tau^\beta$  raffine donc bien  $\tau^\alpha$ .  $\square$

*Remarque 4.5.* Si deux poids  $\alpha, \beta$  sont égaux à partir d'un certain rang, par la proposition précédente,  $\tau^\alpha$  et  $\tau^\beta$  coïncident car elles se raffinent mutuellement.

**Proposition 4.6.** *Soit  $(S_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de configuration dans  $\text{Ran}(M)$ . Si le cardinal de  $(S_k)$  n'est pas majoré, alors il existe un poids  $\alpha$  tel que la suite  $(S_k)$  n'est pas de Cauchy pour  $d^\alpha$ . En particulier, elle ne converge pas pour  $\tau^\alpha$ .*

*Démonstration.* On extrait de  $(S_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite  $(T_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dont le cardinal  $(n_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissant. On pose alors, pour tout  $k > 1$ ,

$$\alpha(n_k) = \max \left\{ \alpha(n_{k-1}), \frac{1}{\min_{x \neq y \in T_k} \{d_M(x, y)\}} \right\}.$$

Et on a alors, par le lemme 4.2, quel que soit le choix des autres termes de  $\alpha$ , pour tout  $k > k' > 1$ ,

$$d^\alpha(T_k, T_{k'}) \geq \alpha(n_k) \min_{x \neq y \in T_k} \{d_M(x, y)\} \geq 1.$$

La suite  $(T_k)$  n'est pas de Cauchy pour  $d^\alpha$ , et la suite  $(S_k)$  non plus.  $\square$

**Proposition 4.7.** *Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{W}$  deux poids. Si il existe  $N > 0$  et  $C > 0$  tels que*

$$\frac{\beta(n)}{\alpha(n)} \geq Cn^2, \quad \forall n \geq N$$

*alors  $\tau^\beta$  est strictement plus fine que  $\tau^\alpha$ . En particulier, pour tout poids  $\alpha$ , il existe un poids  $\beta$  tel que  $\tau^\beta$  strictement plus fine que  $\tau^\alpha$ .*

*Démonstration.* On a trivialement  $\alpha \leq \beta$  donc, par la Proposition 4.4,  $\tau^\beta$  raffine  $\tau^\alpha$ . Montrons que ces topologies sont distinctes. L'Exemple 4.1 fournit une suite  $S_n$  de configurations qui convergent vers  $S_0$  pour la topologie  $\tau^\alpha$ .

D'autre part, soit  $n > N$ . Par le Lemme 4.2, on a

$$d^\beta(S_n, S_0) \geq \beta(n) \min_{z \neq w \in S_n} \{d_M(z, w)\} = \beta(n)\epsilon_{n,n} = \frac{\beta(n)}{n^2\alpha(n)} \geq C$$

On en déduit que la suite  $S_n$  ne converge pas vers  $S_0$  pour la topologie  $\tau^\beta$  et que ces deux topologies sont donc distinctes.  $\square$

*Remarque 4.8.* Il existe une infinité non dénombrable de topologies distinctes (suites géométriques de raison  $q \geq 1$ ).

**4.2. Comparaison aux topologies classiques.** On montre ici que les topologies pondérées sont intermédiaires entre la topologie de Hausdorff et la topologie faible (propositions 4.9 et 4.10), et que la topologie faible peut être obtenue en prenant la limite inverse du foncteur  $\text{Ran}^-(M)$  (théorème 4.12).

**Proposition 4.9.** *Soient  $\alpha$  un poids,  $S, T \in \text{Ran}(M)$ , alors  $d_H(S, T) \leq d^\alpha(S, T)$ . En particulier, la topologie  $\tau^\alpha$  est plus fine que la topologie de Hausdorff  $\tau_H$ .*

*Démonstration.* Il existe  $x \in S$  tel que  $d_H(S, T) = d_M(x, T)$  ou  $y \in T$  tel que  $d_H(S, T) = d_M(y, S)$ . Par symétrie, on suppose qu'il existe  $x \in S$  tel que  $d_H(S, T) = d_M(x, T)$ . Par ailleurs par le théorème 3.25, il existe un chemin  $\alpha$ -optimal  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \text{Ran}(M)$  de  $S$  à  $T$ . Par le Lemme 2.14, il existe un chemin  $\gamma_x^0: [0, 1] \rightarrow M$  tel que  $\gamma_x^0(0) = x$ ,  $\gamma_x^0(1) \in \gamma(1) = T$  et  $\ell(\gamma_x^0) \leq \ell^\alpha(\gamma)$ . On a alors

$$d_H(S, T) = d(x, T) \leq d(x, \gamma_x^0(1)) \leq \ell(\gamma_x^0) \leq \ell^\alpha(\gamma) = d^\alpha(S, T)$$

Donc, pour tout  $S \in \text{Ran}(M)$ , et pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $B^\alpha(S, \epsilon) \subset B_H(S, \epsilon)$ . On a donc bien  $\tau^\alpha$  plus fine que  $\tau_H$ .  $\square$

**Proposition 4.10.** *Pour tout poids  $\alpha$ , la topologie  $\tau^\alpha$  est strictement plus grossière que la topologie  $\tau_w$ .*

*Démonstration.* Soient  $\alpha$  un poids,  $S \in \text{Ran}(M)$  et  $\epsilon > 0$ . Montrons que  $B^\alpha(S, \epsilon)$  est un ouvert de  $\tau_w$ . Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \pi_n^{-1}(B^\alpha(S, \epsilon))$ . On pose  $\delta = \frac{\epsilon - d^\alpha(\pi_n(X), S)}{\alpha(n)}$ . Soit  $Y = (y_1, \dots, y_n) \in M^n$  tel que  $\|X - Y\|_\Sigma < \delta$ . On a alors

$$\begin{aligned} d^\alpha(\pi_n(Y), S) &\leq d^\alpha(\pi_n(Y), \pi_n(X)) + d^\alpha(\pi_n(X), S) \\ &\leq \sum_{j=1}^k \alpha(n) d_M(x_j, y_j) + d^\alpha(\pi_n(X), S) \\ &\leq \alpha(n) \|X - Y\|_\Sigma + d^\alpha(\pi_n(X), S) \\ &< \alpha(n) \delta + d^\alpha(\pi_n(X), S) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$



Donc  $\pi_n(Y) \in B^\alpha(S, \epsilon)$ , et  $B_\Sigma(X, \delta) \subset \pi_n^{-1}(B^\alpha(S, \epsilon))$ . On en déduit que  $\pi_n^{-1}(B^\alpha(S, \epsilon))$  est un ouvert de  $M^n$ , et que  $B^\alpha(S, \epsilon)$  est un ouvert de  $\tau_w$  qui est plus fine que  $\tau^\alpha$ .

De plus, par la proposition 4.7, il existe un poids  $\beta$  telle que  $\tau^\beta$  est strictement plus fine que  $\tau^\alpha$ . Comme  $\tau_w$  est plus fine que  $\tau^\beta$ , elle est strictement plus fine que  $\tau^\alpha$ .  $\square$

*Remarque 4.11.* Par définition,  $\text{Ran}_{\leq n}(M)$  est l'image de l'application quotient  $\pi_n: M^n \rightarrow \text{Ran}(M)$  puisque toute configuration de cardinal  $k \leq n$  est l'image d'un  $n$ -uplet, avec un nombre approprié de répétitions. Par ailleurs, on note que pour tout poids  $\alpha$ , la topologie  $\tau^\alpha$  coïncide avec la topologie induite par la distance Hausdorff sur la troncation  $\text{Ran}_{\leq n}(M)$ , ainsi qu'avec la topologie de la troncation comme sous-espace de  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$ . En effet, toutes ces topologies coïncident avec la topologie quotient associée à l'application surjective  $\pi_n: M^n \rightarrow \text{Ran}_{\leq n}(M)$ , cette observation est claire pour la topologie faible et celle de Hausdorff, et découle du résultat précédent pour les topologies  $\tau^\alpha$ .

**Théorème 4.12.** *Soit  $M$  une variété riemannienne complète. L'espace de Ran associé à  $M$ , muni de la topologie faible  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$  est isomorphe à la limite inverse du foncteur  $\text{Ran}^-(M): \mathbb{W}^{\text{op}} \rightarrow \text{Top}$ . Autrement dit, on a :*

$$(\text{Ran}(M), \tau_w) \cong \varprojlim_{\alpha \in \mathbb{W}^{\text{op}}} (\text{Ran}(M), \tau^\alpha)$$

*Démonstration.* On va montrer que  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$  vérifie la propriété universelle. Cela revient à montrer qu'une application  $f: X \rightarrow \text{Ran}(M)$  est continue pour toutes les  $\tau^\alpha$  si et seulement si elle est continue pour  $\tau_w$ . Si  $f: X \rightarrow \text{Ran}(M)$  est continue pour  $\tau_w$ , elle est bien continue pour toutes les  $\tau^\alpha$ , par la Proposition 4.10. Pour montrer l'autre direction, on va montrer que les boules ouvertes des  $\tau^\alpha$  forment une base de  $\tau_w$ .

Soit  $U \subset \text{Ran}(M)$  un ouvert de  $\tau_w$ , et soit  $S = \{x_1, \dots, x_n\} \in U$ . Montrons qu'il existe un poids  $\alpha$  et  $\epsilon > 0$  tels que  $B^\alpha(S, \epsilon) \subset U$ . Pour cela, on va montrer qu'il existe un poids  $\alpha$  et  $\epsilon > 0$  tels que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , la troncation  $B_{\leq p}^\alpha(S, \epsilon) = \{T \in B^\alpha(S, \epsilon) \mid \text{card}(T) \leq p\} \subset U$ .

Commençons par choisir le rayon  $\epsilon$  de la boule. Si  $n > 1$ , on pose

$$\epsilon = \min_{x \neq y \in S} \{d_M(x, y)\} > 0.$$

Si  $n = 1$ ,  $\pi_1^{-1}(U)$  est un ouvert de  $M$ , par définition de  $\tau_w$ , et  $x_1 \in \pi_1^{-1}(U)$ . Il existe donc  $\epsilon_1 > 0$  tel que  $\overline{B_M(x_1, \epsilon_1)} \subset \pi_1^{-1}(U)$ . On choisit alors  $\epsilon = \epsilon_1$ .

Construisons maintenant un poids  $\alpha$ . On commence par remarquer que, par le corollaire 2.22, quel que soit le choix de  $\alpha$ , et pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , il suffit de connaître  $\alpha$  jusqu'au rang  $\max\{n, p\}$  pour définir  $B_{\leq p}^\alpha(S, \epsilon)$ . Si  $n > 1$ , le lemme 4.2 implique que pour tout  $\alpha$ ,  $B_{\leq n-1}^\alpha(S, \epsilon) = \emptyset \subset U$ . On pose alors  $\alpha(2) = \dots = \alpha(n-1) = 1$ , et nous allons construire  $\alpha(p)$  par récurrence forte sur  $p \geq n$ .

Montrons, par récurrence forte sur  $p \geq n$ , que l'on peut construire  $\alpha(p)$  et des compacts  $K_p \subset \pi_p^{-1}(U)$  vérifiant:

- (1)  $B_{\leq p}^\alpha(S, \epsilon) \subset \pi_p(K_p) \subset U$ ,
- (2)  $\forall i \in \{n, \dots, p-1\}$ ,  $\pi_i(K_i) \subset \pi_{i+1}(K_{i+1})$ .

Si  $n = 1$ , on choisit  $K_1 = \overline{B_M(x_1, \epsilon_1)}$  qui est bien compact, et vérifie  $\pi_1(K_1) \subset U$ , par construction de  $\epsilon_1$ . On vérifie que si  $T = \{y\} \in B_{\leq 1}^\alpha(S, \epsilon)$ , on a bien  $d_M(x_1, y) = d^\alpha(S, T) < \epsilon = \epsilon_1$ , d'où  $B_{\leq 1}^\alpha(S, \epsilon) \subset \pi_1(K_1) \subset U$ .

Si  $n > 1$ , on commence par choisir  $X \in \pi_n^{-1}(\{S\}) \subset \pi_n^{-1}(U)$ . Comme  $\pi_n^{-1}(U)$  est un ouvert de  $M^n$ , il existe  $\epsilon_n > 0$  tel que  $\overline{B_{M^n}(X, \epsilon_n)} \subset \pi_n^{-1}(U)$ . On pose alors  $\alpha(n) = \max\{\frac{\epsilon}{\epsilon_n}, 1\}$ , qui vérifie bien  $\alpha(n) \geq \alpha(n-1) = 1$  par construction. Ainsi, par le théorème 3.25, quel que soit  $T \in B_{\leq n}^\alpha(S, \epsilon)$ , il existe un chemin  $\alpha$ -optimal  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \text{Ran}(M)$  qui réalise la distance de  $S$  à  $T$ . Par le lemme 4.2,  $\gamma$  est de cardinal constant égal à  $n$ . Par la proposition 2.10, il se relève en  $\mu: [0, 1] \rightarrow M^n$  tel que  $\ell^\alpha(\mu) = d^\alpha(S, T)$ . Quitte à remplacer  $\mu$  par  $\sigma \cdot \mu$  où  $\sigma \in \Sigma_n$ , on peut supposer que  $\mu(0) = X$ . On a alors

$$d_{M^n}(X, \mu(1)) \leq \ell(\mu) = \frac{\ell^\alpha(\mu)}{\alpha(n)} = \frac{d^\alpha(S, T)}{\alpha(n)} < \frac{\epsilon}{\alpha(n)} \leq \epsilon_n.$$

Ainsi  $T \in \pi_n(\overline{B_{M^n}(X, \epsilon_n)}) \subset U$ , ce qui conclut l'initialisation.

Soit  $p \geq n$ . On suppose les  $\alpha(i)$  et  $K_i$  construits pour  $n \leq i \leq p$ . L'ensemble  $\pi_p(K_p)$  est l'image d'un compact dans un séparé, c'est donc un compact fermé de  $\text{Ran}(M)$ . Il est de plus borné, au sens où il existe  $r > 0$  tel que  $\pi_p(K_p) \subset B_H(\{0\}, r)$ . L'ensemble  $C = \pi_{p+1}^{-1}(\pi_p(K_p))$ , ainsi que les ensembles  $C_k = \{X \in M^{p+1} \mid \min_{Y \in C} \{d_{M^{p+1}}(X, Y)\} \leq \frac{1}{k}\}$ ,  $k \geq 1$ , sont alors des fermés bornés de  $M^{p+1}$ , et donc des compacts par le Lemme 1.29. Les  $C_k$  forment donc une suite décroissante de compacts vérifiant  $\bigcap_{k \geq 1} C_k = C \subset \pi_{p+1}^{-1}(U)$  qui est un ouvert de  $M^{p+1}$ . Il existe donc  $k \geq 1$  tel que  $C_k \subset \pi_{p+1}^{-1}(U)$ . On pose alors  $\epsilon_{p+1} = \frac{1}{k}$ ,  $K_{p+1} = C_k$  et  $\alpha(p+1) = \max\{\alpha(p), \frac{\epsilon}{\epsilon_{p+1}}\}$ . On a alors, par construction,  $\pi_{p+1}(K_{p+1}) \subset U$ .

Commençons par vérifier que  $\pi_p(K_p) \subset \pi_{p+1}(K_{p+1})$ . Soit  $T \in \pi_p(K_p) \subset \text{Ran}_{\leq p+1}(M)$ . Comme  $\pi_{p+1}$  est surjective sur la troncation  $\text{Ran}_{\leq p+1}(M)$ , il existe  $X \in M^{p+1}$  tel que  $\pi_{p+1}(X) = T$ . Autrement dit,  $X \in \pi_{p+1}^{-1}(\pi_p(K_p))$ . Or, par construction,  $\pi_{p+1}^{-1}(\pi_p(K_p)) \subset K_{p+1}$ , et donc  $T = \pi_{p+1}(X) \in \pi_{p+1}(K_{p+1})$ .

Montrons maintenant que  $B_{\leq p+1}^\alpha(S, \epsilon) \subset \pi_{p+1}(K_{p+1})$ . Soit  $T \in B_{\leq p+1}^\alpha(S, \epsilon)$ . Si  $\text{card}(T) \leq p$ , alors  $T \in B_{\leq p}^\alpha(S, \epsilon) \subset \pi_p(K_p) \subset \pi_{p+1}(K_{p+1})$ . Sinon  $\text{card}(T) = p+1$ . Par le théorème 3.25, il existe alors un chemin  $\alpha$ -optimal de  $S$  à  $T$ ,  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \text{Ran}(M)$ . Le chemin  $\gamma$  étant crénelé, par hypothèse, il existe  $t \in [0, 1[$  tel que

- $\text{card}(\gamma(s)) = p+1, \forall s \in ]t, 1]$
- $\text{card}(\gamma(t)) \leq p$

On a alors, par la proposition 3.26,

$$d^\alpha(S, T) = d^\alpha(S, \gamma(t)) + d^\alpha(\gamma(t), T) < \epsilon.$$

Ainsi,  $\gamma(t) \in B_{\leq p}^\alpha(S, \epsilon) \subset \pi_p(K_p)$ . De plus, par la Proposition 2.10, il existe  $\mu: [t, 1] \rightarrow M^{p+1}$ , un relèvement de  $\gamma|_{[t, 1]}$  tel que  $\ell^\alpha(\mu) = \ell^\alpha(\gamma|_{[t, 1]}) = d^\alpha(\gamma(t), T)$ . On a alors, par

construction,  $\mu(t) \in \pi_{p+1}^{-1}(\pi_p(K_p))$ , et il vient :

$$\begin{aligned} d_{M^{p+1}}(\pi_{p+1}^{-1}(\pi_p(K_p)), \mu(1)) &\leq d_{M^{p+1}}(\mu(t), \mu(1)) \\ &\leq \ell(\mu) = \frac{\ell^\alpha(\mu)}{\alpha(p+1)} = \frac{d^\alpha(\gamma(t), T)}{\alpha(p+1)} \\ &< \frac{\epsilon}{\alpha(p+1)} \leq \epsilon_{p+1} \end{aligned}$$

Ainsi  $\mu(1) \in K_{p+1}$  et donc  $T = \pi_{p+1}(\mu(1)) \in \pi_{p+1}(K_{p+1})$ , ce qui conclut la récurrence, et cette démonstration.  $\square$

**4.3. Quelques conséquences pour la topologie faible.** On utilise maintenant les outils mis en place dans cet article pour démontrer (ou redémontrer) quelques propriétés sur la topologie faible. En particulier, bien que  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$  ne soit pas métrisable, il vérifie une propriété similaire à la complétude (proposition 4.14).

**Proposition 4.13.** *Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\text{Ran}(M)$  telle que  $\text{card}(S_n)$  n'est pas borné. La suite  $(S_n)$  ne converge pas pour la topologie faible.*

*Démonstration.* Par la proposition 4.6, il existe un poids  $\alpha$  tel que  $(S_n)$  ne converge pas pour la topologie  $\tau^\alpha$ . Comme  $\tau_w$  est plus fine que  $\tau^\alpha$ , la suite  $(S_n)$  ne converge pas non plus pour  $\tau_w$ .  $\square$

**Proposition 4.14.** *Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite dans  $\text{Ran}(M)$ . Si  $(S_n)$  est de Cauchy pour toutes les distances  $d^\alpha$ , alors elle converge dans  $\tau_w$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 4.6, si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est de Cauchy pour toutes les distances  $d^\alpha$ , alors il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\text{card}(S_n) \leq N$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par la proposition 4.9, la suite  $(S_n)$  est de Cauchy pour la distance de Hausdorff. Par la proposition 1.22 la topologie de Hausdorff est complète sur les troncations, donc la suite  $(S_n)$  converge pour  $\tau_H$ . Or, par la proposition 1.21,  $\tau_w$  et  $\tau_H$  coïncident sur les troncations, la suite  $(S_n)$  converge aussi pour  $\tau_w$ .  $\square$

**Corollaire 4.15.** *Si  $M$  est une variété riemannienne complète de dimension  $q \geq 1$  alors  $(\text{Ran}(M), \tau_w)$  n'admet pas de base dénombrable de voisinages.*

*Démonstration.* On se place dans le cadre de l'Exemple 4.1, et on considère la configuration  $S = S_0 \in \text{Ran}(M)$ . Soit  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$  une collection de voisinages de  $S$ . Montrons qu'il ne peut s'agir d'une base de voisinages. Par le théorème 4.12, pour tout  $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , il existe  $\alpha^i$  un poids et  $\epsilon^i > 0$  tels que  $B^{\alpha^i}(S, \epsilon^i) \subset U_i$ . On définit alors un poids  $\beta$  via,

$$\beta(k) = \max\{\alpha^i(k)k^2 \mid 1 \leq i \leq k\},$$

pour tout  $k \geq 1$ . Par construction, pour tout  $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , et pour tout  $n \geq i$ , on a

$$\frac{\beta(n)}{\alpha^i(n)} \geq n^2$$

En particulier, par la proposition 4.7, la topologie  $\tau^\beta$  est strictement plus fine que  $\tau^{\alpha^i}$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Finalement, pour  $\epsilon > 0$ , on a

$$B^{\alpha^i}(S, \epsilon^i) \not\subset B^\beta(S, \epsilon), \quad \forall i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$

On en déduit que  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$  n'est pas une base de voisinage.  $\square$

#### REFERENCES

- [BD04] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld. *Chiral algebras*, volume 51 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [CG17] Kevin Costello and Owen Gwilliam. *Factorization algebras in quantum field theory. Vol. 1*, volume 31 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [CILW18] Ricardo Campos, Najib Idrissi, Pascal Lambrechts, and Thomas Willwacher. Configuration Spaces of Manifolds with Boundary. *arXiv e-prints*, page arXiv:1802.00716, February 2018.
- [CL21] Anna Cepek and Damien Lejay. On the topologies of the exponential. *arXiv e-prints*, page arXiv:2107.11243, July 2021.
- [Idr19] Najib Idrissi. The Lambrechts-Stanley model of configuration spaces. *Invent. Math.*, 216(1):1–68, 2019.
- [Lur17] Jacob Lurie. *Higher Algebra*. 2017. <http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf>.